



Influencia de un *software* educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas

- Influence of an Educational *Software* in the Consolidation of the Learning of Quadric Surfaces
- Influência de um *software* educacional na consolidação do aprendizado de superfícies quádricas

Resumen

La geometría analítica 3-dimensional es importante en los cursos de cálculo multivariado, no obstante los estudiantes tienen dificultades para su aprendizaje. Presentamos resultados de una investigación sobre aprendizaje de las superficies cuádricas mediante una intervención didáctica basada en el *software* dinámico 3-dimensional educativo GAnalitica3D. Analizamos la influencia del carácter constructivista y colaborativo de la enseñanza y de las habilidades de visualización necesarias para interactuar con el *software*. La experimentación se realizó con estudiantes universitarios, que resolvían los problemas en pequeños grupos y después hacían puestas en común. Informamos sobre la evaluación de conocimientos previos de los estudiantes realizada y mostramos ejemplos de resoluciones en las que se aprecian el progreso y las dificultades de los estudiantes. Concluimos que el *software* permite relacionar comprensivamente las representaciones algebraica y visual de las superficies cuádricas, lo cual facilita su aprendizaje.

Palabras clave

aprendizaje asistido por ordenador; geometría; *software* didáctico; tecnología educacional

Abstract

Three-dimensional analytical geometry is important in multivariate calculus courses, but students have difficulty learning it. We present results from a research on learning quadric surfaces by means of a didactical intervention based on the 3-dimensional dynamic educational software GAnalitica3D. We analyze the influence

Efraín Alberto Hoyos Salcedo*
César Augusto Acosta Minoli**
Jorge Hernán Aristizábal Zapata***
Mónica Jhoana Mesa Mazo****
Carlos Andrés Trujillo Salazar*****
Julián Andrés Rincón Penagos*****
Ángel Gutiérrez Rodríguez*****
Adela Jaime Pastor*****

* Magíster en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. Docente titular y director del Programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío. Correo electrónico: eahoyos@uniquindio.edu.co. Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8940-7824>

** Ph.D. en Matemáticas, Florida State University. Docente titular del programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío. Correo electrónico: cminoli@uniquindio.edu.co. Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7726-160X>

*** Magíster en educación, Universidad Católica de Manizales. Docente del programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío. Correo electrónico: jhaz@uniquindio.edu.co. Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8875-1823>

**** Ph.D. en Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia. Docente del programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío. Correo electrónico: mjmesa@uniquindio.edu.co. Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-7814-917X>

***** Magíster en Biomatemática, Universidad del Quindío. Docente del programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío. Correo electrónico: catrujillo@uniquindio.edu.co. Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-2217-746X>

***** Magíster en ciencias de la educación, Universidad del Quindío. Docente del programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío. Correo electrónico: jarincon@uniquindio.edu.co. Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-0768-4145>

***** Ph.D. en Matemáticas, Universidad de Valencia. Docente del Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia. Correo electrónico: angel.gutierrez@uv.es. Código Orcid: <http://orcid.org/0000-0001-7187-6788>

***** Ph.D. en Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia. Docente del Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia. Correo electrónico: adela.jaime@uv.es. Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-3839-1476>



of the constructivist and collaborative nature of teaching and the visualization skills necessary to interact with the software. The experimentation was carried out with university students, who solved the problems in small groups and then made whole group discussions. We report on the assessment of students' initial knowledge carried out and present examples of solutions in which the progress and difficulties of students are demonstrated. We conclude that the software allows students to comprehensively relate the algebraic and visual representations of quadric surfaces, which facilitates their learning.

Keywords

computer assisted learning; educational software; educational technology; geometry

Resumo

A geometria analítica tridimensional é importante em cursos de cálculo multivariado, porém os alunos têm dificuldade em aprendê-la. Apresentamos os resultados de uma investigação sobre a aprendizagem de superfícies quádricas por meio de uma intervenção didática baseada no software educacional dinâmico tridimensional GAnalítica3D. Analisamos a influência da natureza construtivista e colaborativa do ensino e as habilidades de visualização necessárias para interagir com o software. A experimentação foi realizada com estudantes universitários, que resolveram os problemas em pequenos grupos e depois compartilharam. Relatamos a avaliação de conhecimentos prévios dos alunos realizada e apresentamos exemplos de resoluções em que são apreciados os avanços e dificuldades dos alunos. Concluímos que o software permite relacionar de forma abrangente as representações algébricas e visuais de superfícies quádricas, o que facilita a sua aprendizagem.

Palavras-chave

aprendizagem assistida por computador; geometria; *software* didático; tecnologia educacional

Introducción

Desde una perspectiva epistemológica, la geometría analítica tridimensional es el estudio de objetos geométricos que se encuentran en el espacio euclídeo de tres dimensiones, considerando un sistema de coordenadas que permite describirlos algebraicamente. Este enfoque algebraico de la geometría de los objetos en el espacio tiene importantes aplicaciones en diferentes campos del conocimiento y su aprendizaje es fundamental dado que sirve como elemento introductorio para la comprensión de conceptos matemáticos más avanzados en temas relacionados con álgebra lineal y cálculo multivariado. En esta dirección, Caglayan (2018) concluye que el aprendizaje de la geometría es un requisito indispensable para la comprensión de conceptos más elaborados y abstractos como los relacionados con álgebra lineal o espacios vectoriales. Adicionalmente, el aprendizaje de la geometría analítica tridimensional permite el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, el cual es esencial para el pensamiento científico, ya que se usa para representar y manipular información en la resolución de problemas en el espacio (Vasco, 1994).

Dentro de la geometría analítica tridimensional, se destacan las superficies cuádricas. Una superficie cuádrica se define como *la gráfica*, o la solución de una ecuación de segundo grado en un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional (Hilbert et al., 1999). Una propiedad importante de las superficies cuádricas es que la intersección con un plano genera una sección cónica propia o degenerada. Así, los coeficientes en la ecuación de segundo grado juegan un papel importante en su caracterización, dando origen a las siguientes familias de superficies: elipsoides, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de dos hojas, paraboloides elípticos, paraboloides

hiperbólicos y conos. Adicionalmente, otras configuraciones de los parámetros permiten encontrar otras soluciones, que se denominan superficies cuádricas degeneradas, como el caso de planos intersecantes o del punto (Weisstein, 2020). Para analizar con detalle las propiedades de una superficie cuádrica, la ecuación general de segundo grado se puede manipular algebraicamente hasta reescribirla de forma conveniente en la denominada *ecuación canónica*. Esta permite establecer una relación más evidente entre los parámetros y las propiedades geométricas de la superficie.

A nivel curricular, las superficies cuádricas aparecen generalmente al inicio de los cursos de cálculo multivariado y se utilizan para introducir conceptos relacionados con funciones, derivadas e integrales. En los cursos se plantean los siguientes objetivos de aprendizaje: desde lo algebraico: 1) Identificar la familia a la cual pertenece; 2) Identificar diferentes representaciones algebraicas y manipularlas correctamente, como, por ejemplo, llevar la ecuación cuadrática general a la ecuación canónica y viceversa. Desde lo geométrico: 3) Dibujar la superficie en el espacio; 4) Identificar correctamente los cortes con los planos coordenados y planos paralelos a los mismos (cada plano coordenado queda determinado por dos de los ejes coordenados); 5) Identificar y dibujar diferentes proyecciones ortogonales de las superficies; 6) Reconocer curvas de nivel. Finalmente, se entiende como consolidación del aprendizaje al proceso en el cual el estudiante establece una relación clara y precisa entre la representación algebraica y la representación geométrica de las superficies cuádricas, esto es, dada la ecuación dibuja la superficie y viceversa, para aplicarlos en la resolución de problemas más complejos.

Sin embargo, son muchas las dificultades que los estudiantes presentan para alcanzar estos objetivos de aprendizaje. Desde lo

algebraico, Hernández (2016) caracteriza tipos de errores matemáticos en el conocimiento procedimental que evidencia un grupo de estudiantes cuando resuelve problemas de superficies cuadráticas en cálculo vectorial, encontrando dificultades relacionadas con el uso de datos en el enunciado, errores algebraicos, representación errónea de la gráfica con base en la ecuación y uso de definiciones incorrectas. A través de su estudio, Hernández ratifica la importancia del conocimiento procedimental en la resolución de problemas. Desde lo geométrico y desde sus experiencias como docentes en el área, los autores del presente trabajo observan frecuentemente que problemas tales como *calcular el volumen de la intersección entre dos cilindros circulares rectos* son un reto para los estudiantes, no tanto por el cálculo de las integrales sino por la visualización del objeto geométrico resultante de dicha intersección. Por lo tanto, son varios los problemas que deben resolverse al dibujar un objeto en el espacio: el de la perspectiva, el de la posición relativa entre los elementos, el de la conservación de las proporciones y el de la dirección de las líneas.

En ese sentido, la tecnología computacional juega un papel importante para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Jones et ál. (2016), afirman que la combinación de tareas 2D y 3D sobre figuras geométricas por medio de herramientas tecnológicas, permite potenciar el desarrollo del conocimiento espacial de los estudiantes y mejorar sus habilidades de razonamiento espacial. La interacción dinámica que proporciona la tecnología le ayuda al estudiante a construir sus habilidades algebraicas dándoles significado, desde la manipulación de simples símbolos algebraicos hasta el estudio de propiedades y relaciones entre los parámetros y los efectos que tienen sobre las gráficas, las cuales puede ver de forma inmediata (Kaput, 1992). Las características dinámicas de la tecnología promueven en los estudiantes la capacidad para formular, validar y rechazar conjeturas (Arzarello et ál., 2011). La tecnología favorece el aprendizaje porque se requiere de las acciones de los estudiantes para lograr un objetivo y, en el proceso, estos aprenden por medio de la coordinación y la reflexión constante de sus interacciones con las figuras que observan en la pantalla (Laborde et ál., 2006). En relación con las actitudes, Sinclair et ál. (2016) afirman que los sistemas computacionales juegan un papel importante para incrementar la motivación y la confianza de los estudiantes, ya que permiten validar el trabajo realizado e instigan discusiones en el aula de clase.

Adicionalmente, la literatura reporta *software* que ofrecen todas las bondades mencionadas para el aprendizaje de las superficies cuádricas, entre estos Cabri 3D, Geogebra 3D y Winplot (Jones et ál., 2016). Sin embargo, este tipo de *software* solo se convierte en didáctico cuando se apoya de una secuencia de aprendizaje proporcionada por el docente y la evaluación del estudiante solo se logra por la intervención del docente. La mayoría de estos *softwares* no tienen la intencionalidad didáctica en su diseño, no permiten el desarrollo de habilidades de visualización de forma intrínseca y no proponen en sí mismos actividades de aprendizaje (Mota et ál., 2013). Por lo tanto, aún es necesario aplicaciones que incluyan en su diseño, objetivos de aprendizaje relacionados con la visualización espacial.

Este trabajo tiene por objetivo presentar resultados de un proyecto de investigación en el que se analizó cualitativamente la influencia del uso de una propuesta de intervención didáctica enriquecida con *software* educativo 3-dimensional en la consolidación del aprendizaje de las superficies cuádricas por parte de un grupo de estudiantes de cálculo multivariado a nivel universitario.

El contenido de este artículo está organizado en cinco secciones. Después de esta introducción, en la segunda sección se describen los elementos teóricos que sustentan la presente investigación; a continuación, se presentan los aspectos metodológicos que permitieron desarrollar el objetivo y responder a la pregunta de investigación; en la cuarta sección, se presenta una descripción cualitativa complementada con datos cuantitativos de las respuestas de los estudiantes frente a las actividades que el *software* propone de forma automática; finalmente, en la quinta sección se presentan las conclusiones, limitaciones y trabajo futuro.

Referentes teóricos

Para dar respuesta al objetivo enunciado al final de la introducción, se presentan en esta sección elementos teóricos relacionados con el *software* de geometría dinámica, en particular el 3-dimensional, ya que este es el elemento principal de la intervención didáctica que hemos realizado. Además, es necesario especificar referentes teóricos que nos permitan analizar la presencia de la visualización en las interacciones de los estudiantes con el *software*.

La propuesta didáctica, con base en las investigaciones más recientes en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría de la Psychology of Mathematics Education (PME, por sus siglas en inglés) (Jones et ál., 2016), se enfoca en un trabajo constructivista y colaborativo, en el que el estudiante, mediante el

uso del *software* educativo y de las actividades desarrolladas por el grupo de investigación, tiene la posibilidad de establecer relaciones entre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y discutir con sus compañeros sobre las alternativas para solucionar los problemas proporcionados por el *software*.

Con respecto al papel del computador en el aprendizaje de la geometría en el espacio tridimensional, Christou et ál. (2007) afirman que el *software* de geometría dinámica en 3D provee una gran variedad de riqueza visual de imágenes espaciales, que no se consigue en representaciones estáticas en el papel y, en algunos casos, ni en el espacio físico. La visualización dinámica que ofrece el computador estimula en el individuo la capacidad para manipular mentalmente los objetos espaciales y, a su vez, cuanto más enriquecida sea dicha capacidad, más fácil será para el individuo el uso de imágenes en la resolución de problemas. Finalmente, Gutiérrez et ál. (2004) aseguran que, cuando una persona manipula un objeto tridimensional sólido físicamente y lo rota, las rotaciones hechas en la mano son tan rápidas e inconscientes que difícilmente se puede hacer una reflexión formal de tales acciones. Sin embargo, en un *software* 3D es posible limitar la dirección de rotación, obligando al estudiante a inferir diversas estrategias con respecto al movimiento y anticipar el resultado final de la transformación. Por lo tanto, en este proceso, los estudiantes harán uso de recursos educativos tecnológicos y digitales necesarios para desarrollar competencias en visualización espacial que están relacionadas con los contenidos matemáticos estudiados.

En atención a estas orientaciones teóricas, el *software* desarrollado en esta investigación se diseñó con la intención didáctica de que sus usuarios utilizaran sus habilidades de visualización espacial para la resolución de los problemas propuestos. Para ello, se consideró

el trabajo realizado por Clements et ál. (1992), quienes definen la visualización espacial como un conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales las representaciones mentales de objetos espaciales, relaciones y transformaciones se construyen y manipulan. Así, la visualización no solo consiste en tener una percepción de un objeto en el espacio, sino en la manipulación de diferentes representaciones de este para resolver problemas en diferentes contextos. De esta manera, el *software* desarrollado lleva al usuario a establecer relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica de los objetos matemáticos, permitiéndole manipular visualmente los objetos a partir de la traslación, la rotación y el manejo de vistas isométricas, esta última, considerada como una actividad importante en el desarrollo del razonamiento espacial (Olkun, 2003).

Los problemas propuestos en el *software* se apoyan en las tareas de visualización formuladas por Gonzato et ál. (2011), particularmente, las tareas de tipo 1 (orientar objetos respecto del observador) y de tipo 2 (describir, crear y transformar objetos). Partiendo de este último tipo de tareas, en el diseño del *software* se establecieron las siguientes actividades de consolidación del aprendizaje:

- *Problemas directos*: dada una ecuación y sus parámetros los estudiantes deben manipular la superficie que aparece en la pantalla, hasta que satisfaga la ecuación dada.
- *Problemas inversos*: dada la representación gráfica de un objeto en el espacio, los estudiantes deben manipular los valores de los parámetros hasta que la ecuación corresponda a la superficie dada.
- Identificar la superficie o el sólido correspondiente a un conjunto de secciones planas dado.

Metodología

Para desarrollar el objetivo y dar respuesta a la pregunta de investigación, se presentan a continuación las estrategias de intervención en el aula, el *software* y los materiales de apoyo que hemos creado; finalmente se hace una descripción del experimento de enseñanza, de la población y del procedimiento utilizado para analizar los datos.

Descripción de la propuesta de intervención

La propuesta de intervención en el aula se basa en la teoría cognitiva del aprendizaje (Baroody, 2000, en Acosta et ál., 2015) se enfoca en el trabajo constructivista, colaborativo, y se compone de tres fases, las cuales se presentan a continuación:

- **Estados previos** (indagación). Mediante un diálogo con los estudiantes, el maestro relaciona el tema de la actividad anterior con el tema correspondiente a desarrollar. En esta etapa el maestro también indaga sobre

- los conocimientos previos que el estudiante tiene acerca del nuevo tema.
- **Desarrollo y descubrimiento** (orientación dirigida y libre). En esta parte, el estudiante emplea las guías y el *software* desarrollado. El aprendizaje se realiza en grupos (normalmente dos estudiantes), lo que les permite intercambiar argumentos y llegar a los primeros acuerdos conceptuales con respecto al tema de estudio.
- **Puesta en común.** Esta fase es de suma importancia en el proceso de aprendizaje. Aquí los estudiantes relatan las experiencias obtenidas en el desarrollo de la etapa anterior. Los estudiantes mediante acuerdos orientados por el maestro forman un sistema de relaciones del objeto de estudio, lo cual los lleva a un nuevo nivel de aprendizaje. La intervención del maestro consiste en proporcionar a los estudiantes algunos panoramas generales de aquello que ellos ya conocen.

En cuanto a los temas a desarrollar, se eligieron en función del conocimiento necesario para lograr desarrollar el tema de superficies cuádricas (geometría analítica bidimensional,

puntos, planos y cilindros) y las siguientes superficies cuádricas (elipsoides, hiperboloide de una hoja hiperboloide de dos hojas, paraboloides elíptico, paraboloides hiperbólico y cono).

Descripción del *software* utilizado

Para las actividades en el aula se utilizaron dos *software* desarrollados por los autores de este artículo, siguiendo los lineamientos de desarrollo de *software* educativo propuestos por Galvis (1992) y Abud (2009). El primero se denomina *Cortes de superficies y sólidos*, este ofrece a sus usuarios un ambiente tridimensional para la identificación de sólidos y superficies construidos a partir de las secciones planas, esto es, lugares geométricos de intersección entre la superficie con planos paralelos a los planos cartesianos. En la actividad propuesta de forma automática por el *software*, se le pide al estudiante que a partir de una sucesión de secciones planas, obtenidas mediante el movimiento de las flechas del teclado y diferentes estrategias de visualización espacial, identifique el sólido o la superficie a la cual corresponde. La interfaz del *software* se presenta en la Figura 1 y en la Figura 2 se muestra el sólido solución.

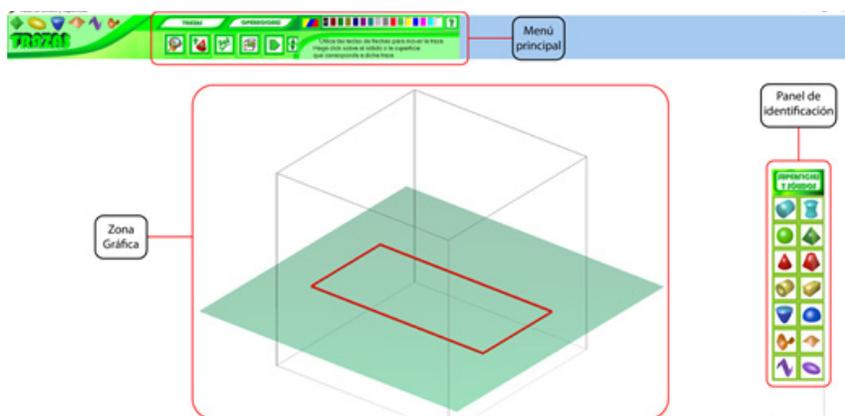


Figura 1. Interfaz del *software* educativo cortes de superficies y sólidos

Fuente: elaboración propia.

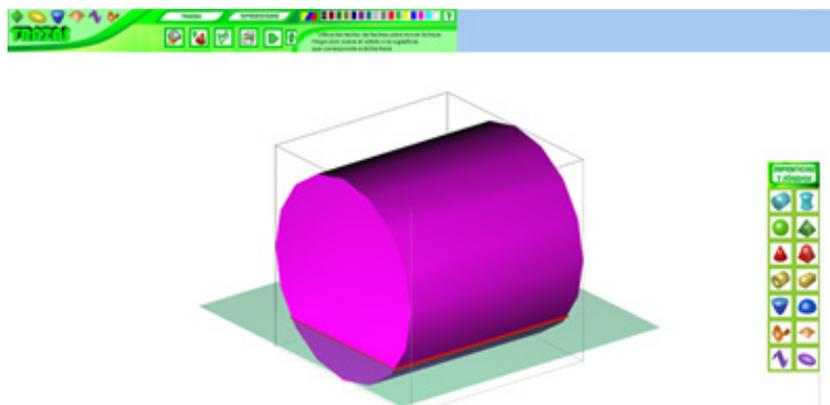


Figura 2. Solución del problema planteado en la figura 1. El sólido corresponde a un cilindro

Fuente: elaboración propia.

El segundo *software* se denomina *GAnalítica 3D*, aborda cuatro temas de la geometría analítica tridimensional, los cuales son: puntos, planos, cilindros y superficies cuádricas, temas que corresponden a toda la unidad de geometría analítica en tres dimensiones de la asignatura Cálculo multivariado. Los objetos tridimensionales se pueden rotar y trasladar, observando sus proyecciones ortogonales interactivamente.

La interfaz de *GAnalítica3D*, Figura 3, incluye la *pantalla gráfica*, en la que los estudiantes pueden manipular la superficie representada, el *menú principal* está compuesto por 12 botones de actividades (puntos, plano perpendicular a un eje, plano paralelo a un eje, plano con ecuación en la forma simétrica, plano que pasa por el origen, cilindros, elipsoide, paraboloides, paraboloides hiperbólicos, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de dos hojas y cono). El *software* genera problemas *automáticamente*, agrupándose en 49 tipos de actividades diferentes, lo cual evita que el estudiante memorice las respuestas —una descripción completa de la interfaz del *software* se encuentra en Hoyos et ál. (2018, p. 105). El *software* está diseñado de tal forma que el estudiante no solo realiza la gráfica de las superficies cuádricas, sino que está enfrentado a un conjunto de problemas con parámetros generados aleatoriamente.

Descripción de la metodología del experimento de enseñanza

Para describir la influencia del uso del *software*, se planteó una metodología de investigación educativa bajo un enfoque cualitativo (Hernández et ál., 2014). Las categorías de estudio que se definieron fueron: estrategias y formas que los estudiantes utilizan en la resolución de los problemas propuestos por el *software* y actitudes de los estudiantes frente al uso del *software* y la metodología de trabajo.

Se seleccionaron los sujetos de investigación con la técnica de muestreo por conveniencia (Sánchez et ál., en Guizado et ál., 2017), en este caso de

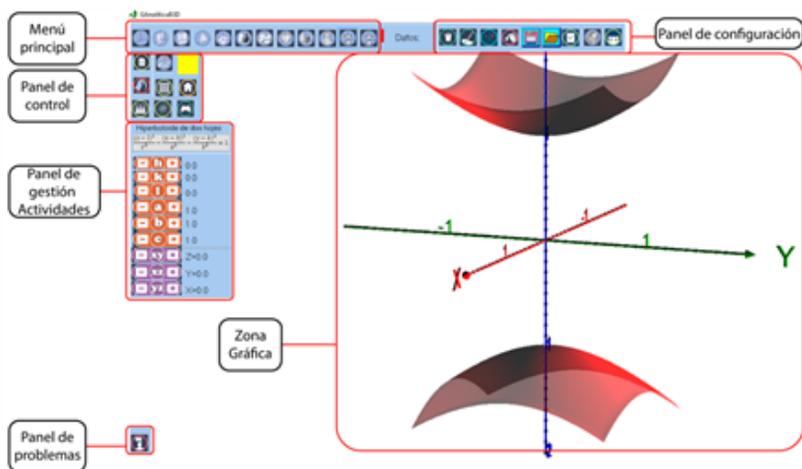


Figura 3. Interfaz del software GAnalitica3D

Fuente: elaboración propia.

acuerdo con la disponibilidad de cursos de cálculo multivariado de la universidad y a la disposición del profesor de permitir realizar el proceso de intervención siguiendo un protocolo de consentimiento informado.

Los participantes fueron estudiantes activos de pregrado. Se tomaron dos grupos de cálculo multivariado: un grupo en la carrera de Licenciatura en Matemáticas (formación en enseñanza de las matemáticas) con 14 estudiantes, todos ellos hombres y un grupo en la carrera de Química con 21 estudiantes, 13 mujeres y 8 hombres. El promedio de edad en ambos grupos es de 19 años. Cabe resaltar que, tanto en Química como en Licenciatura en Matemáticas, a nivel curricular, el curso de cálculo multivariado corresponde al último curso de cálculo que se orienta después de ver cálculo diferencial e integral. En ambos grupos se les enseñó geometría analítica bidimensional en algún momento previo en sus carreras; ambas carreras carecen de una formación en el manejo de dibujos isométricos, perspectivas y proyecciones ortogonales. Los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas tienen una formación más profunda en términos teóricos y demostrativos. El docente, quien aceptó

participar en la investigación, es el mismo en ambos cursos, con formación a nivel de doctorado en el área de las matemáticas y veinte años de experiencia de enseñanza en temas relacionados con cálculo. A pesar de algunas coincidencias y considerando que son dos programas con enfoques y propósitos distintos, las intervenciones así como los resultados de los dos grupos se analizaron independientemente.

La intervención en el aula se compuso de cuatro sesiones de dos horas cada una. En la primera sesión, se desarrolló un repaso de todos los conocimientos previos necesarios para resolver los problemas de superficies cuádricas: distancia entre puntos, línea recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Posteriormente, se realizó una actividad relacionada con dibujar puntos y sólidos con vistas isométricas en el espacio, considerando sus proyecciones ortogonales, frontal, superior y lateral derecho. Los estudiantes trabajaron de forma individual.

En la segunda sesión, primero se aplicó un instrumento para valorar los conocimientos previos de los estudiantes; luego se desarrollaron los conceptos de ubicación de puntos en el espacio, distancia de puntos en el espacio,

planos y cilindros, utilizando el *software* bajo la propuesta de intervención explicada anteriormente. En esta sesión los estudiantes resolvieron la prueba de conocimientos previos de forma individual y luego trabajaron con el *software* GAnalitica3D en grupos de a dos.

En la tercera sesión, se utilizaron ambos *softwares*. Al finalizar la tercera sesión se les pidió a los estudiantes que instalaran los *softwares* en sus computadores y que practicasen en sus casas para la próxima sesión, donde se les pediría que resolviesen tantos ejercicios como fuese posible. En esta sesión los estudiantes trabajaron con el *software* en grupos de a dos.

En la cuarta y última sesión, se les pidió que resolvieran todos los ejercicios que pudiesen resolver en el *software* GAnalitica3D en un tiempo de 30 minutos. La validación del *software* genera un esquema de puntuación basado en la dificultad de cada problema planteado y de esta forma se puede hacer seguimiento del trabajo realizado por el estudiante. Posteriormente, los estudiantes resolvieron un cuestionario de conocimiento *a posteriori* de diez preguntas de selección múltiple en papel, y participaron de una entrevista en grupo. En esta sesión, los estudiantes trabajaron con el *software* en grupos de a dos y resolvieron la prueba de conocimientos individualmente.

Todo el proceso de experimentación se realizó en una sala dotada de equipos de cómputo de escritorio con el *software* desarrollado.

Descripción de la metodología de recogida y análisis de la información

Los instrumentos de investigación, principalmente cualitativos, se dirigieron para describir las categorías objeto del estudio. Estos fueron:

1. *Evaluación de conocimiento a priori*. Permite obtener información sobre los conocimientos previos que los estudiantes tenían y que son requisito para resolver las tareas propuestas por el *software* en el campo de las superficies cuadradas, de igual forma permitió diagnosticar posibles dificultades para corregirlas a tiempo, garantizado de la mejor forma, que cada grupo fuese homogéneo en cuanto a su conocimiento previo.
2. *Ficha de observación en el aula de clase*. Se utilizó para llevar una bitácora del progreso de cada sesión.
3. *Registro filmico*. Se utilizó para analizar los momentos que los investigadores consideraron más relevantes de cada sesión.
4. *Captura de pantallas*. Se utilizó para analizar a posteriori, los diferentes movimientos que realizaban los estudiantes en la pantalla. También se analizaron aspectos relacionados con la usabilidad del *software*.

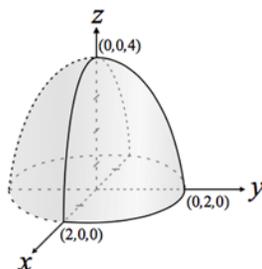
5. *Evaluación de conocimientos a posteriori.* Permitted to obtain information about the knowledge reached by the students. It was designed with the aim of evaluating the following skills:

- Dada una superficie cuádrica en su representación gráfica o en su representación algebraica, identificar una sección plana.
- Dado un conjunto de secciones planas, identificar la superficie cuádrica.

- Dada una superficie cuádrica en su representación gráfica, identificar su representación algebraica y viceversa.
- Identificar relaciones geométricas entre los parámetros de la representación algebraica y la representación geométrica.

La Figura 4 presenta un ejemplo de una pregunta que debían resolver en el papel, relacionada con el tipo de problemas planteados en el software.

1. A continuación se muestra la mitad superior de un elipsoide.



Si el elipsoide es cortado por la sección plana $z = 2$ se obtiene una curva, la cual corresponde a una de las siguientes opciones, señálela.

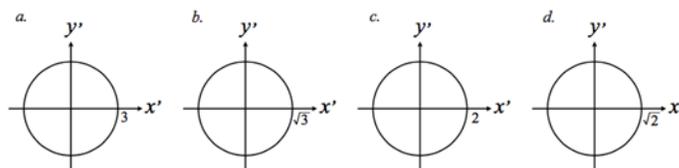


Figura 4. Pregunta planteada en la evaluación de conocimientos a posteriori

Fuente: elaboración propia.

6. *Evaluación de conocimientos a posteriori en el computador.* Se utilizó para valorar los conocimientos de los estudiantes en relación con las siguientes tareas propuestas por el software:

- Ubicar la superficie cuádrica en el espacio cartesiano dada su ecuación en forma canónica.

- Escribir los parámetros de la ecuación en forma canónica de la superficie cuádrica ubicada de forma fija en el espacio cartesiano.

7. *Entrevista grupal a los estudiantes.* Se usó para analizar las actitudes y las opiniones que los estudiantes tienen frente al uso del software en el aula de clase.

Con respecto al proceso y método de análisis de la información recolectada por medio de los instrumentos de investigación, estos se sometieron a un proceso de selección, análisis y triangulación de las técnicas e instrumentos con el fin de abstraer y establecer categorías, las cuales fueron organizadas, interpretadas en función de los referentes teóricos y presentadas según lo establecido en Hernández et ál. (2014). Los resultados relacionados con conocimiento de los estudiantes se analizaron de la información proveniente de los instrumentos 1 al 7. Sus actitudes se analizaron con la información de los instrumentos 2, 3 y 7.

Resultados

El análisis de los datos recogidos que se presenta a continuación sigue una metodología mixta cualitativa y cuantitativa, siendo la primera la más relevante para la valoración del desarrollo del experimento de enseñanza y la obtención de conclusiones respecto de su éxito.

Con respecto a la evaluación del conocimiento *a priori* realizado en la segunda sesión del proceso de intervención, se pudo observar que, en general, los estudiantes no tenían bases sólidas en conceptos relacionados con la identificación y representación, tanto algebraica como geométrica, de las secciones cónicas (Tabla 1). Algunos estudiantes reportaron dificultades en la manipulación algebraica de ecuaciones de las secciones cónicas para llevarla de la forma general a la canónica, 35% en Licenciatura en Matemáticas y 26% en Química. En contraparte, solo el 21% de los estudiantes en Licenciatura en Matemáticas y el 8% en Química respondieron correctamente preguntas relacionadas con identificación de sólidos a través de dibujos isométricos y cálculo de volúmenes de sólidos simples a partir de las proyecciones ortogonales. Posteriormente a estos resultados se aplicó un taller de refuerzo.

Tabla 1. Dificultades de los estudiantes (en porcentaje) en el uso de las formas de representación de las secciones cónicas

	Programa de Licenciatura en Matemáticas	Programa de Química
Dificultades con la representación algebraica	35%	26%
Dificultades con la representación 3-dimensional	79%	92%

Fuente: elaboración propia.

Un elevado número de estudiantes tuvo dificultades para manejar ambas formas de representación de las secciones cónicas, siendo evidente la diferencia entre su habilidad para trabajar algebraica y geoméricamente. Este resultado

no es sorprendente si se tiene en cuenta que la forma habitual de trabajo en las clases de matemáticas es analítica y que los profesores recurren muy poco o nada a las representaciones visuales.

Al analizar cómo los estudiantes ubican puntos en el espacio con el software y comparar sus respuestas en esta pregunta y en la prueba *a priori*, se puede concluir que el procedimiento para ubicar un punto en el espacio 3D fue claro con el software. Los estudiantes, aunque ya habían recibido previamente en sus clases información sobre cómo se ubicaba un punto en espacio 3D, no lo habían puesto en práctica y fue precisamente el trabajo con el software el que les permitió consolidar el proceso, evidencia de ello se transcribe la entrevista de dos estudiantes:

(Entrevistador): Explique qué procedimiento utiliza para ubicar un punto en el espacio 3d.

(Est.Ma.2): "Primero que todo identificar los ejes".

(Entrevistador): "¿A qué se refiere a identificarlos?"

(Est.Ma.2): "El orden, es decir x, y, z ", para mirar la coordenada.

(Entrevistador): "O sea, ¿qué este orden podría cambiar?"

(Est.Ma.2): "Sí, pues podría estar el eje y arriba o el x a un lado".

(Entrevistador): "Muy bien, ¿y entonces?"

(Est.Ma.2): "Ya identificados los ejes paso a ubicarlos según los ejes, las cantidades de las coordenadas en cada una según la escala".

(Est.Ma.5): "buscó los ejes x e y , ubicó, luego me muevo en y , y corro a izquierda o derecha y por último subo o bajo cuantas veces me diga".

(Entrevistador): "¿Cómo aprendió el procedimiento?"

(Est.Ma.5): "para ser sincera, lo aprendí con ustedes y el software porque cuando el profesor lo enseñó, lo explicó muy rápido y todo y no le pude entender muy bien".

En relación con el uso del software *Cortes de superficies y sólidos* los estudiantes manifiestan que al dejar la flecha del teclado presionada se forma un continuo de secciones planas creando un movimiento del plano de intersección lo que permitió visualizar o componer la imagen del sólido que se debía identificar, esta tarea de consolidación es interesante por dos motivos: primero, permite desarrollar una habilidad para la visualización de superficies en el espacio, la cual es importante en el aprendizaje de temas más avanzados de cálculo, como es el caso de funciones multivariadas a través de curvas de nivel; segundo, propone una tarea adicional de visualización de objetos en el espacio que no aparece en las propuestas por Gonzato et ál. (2011), los sólidos en el espacio se pueden visualizar a partir de la construcción dinámica y continua de secciones planas, ... como si fuese una impresora 3D.

En cuanto al uso de *GAnalítica3D*, a los estudiantes se les pidió que describieran en una hoja de papel las estrategias paso a paso que utilizaron para resolver los problemas propuestos por el software. La Figura 5 presenta las estrategias desarrolladas por uno de los estudiantes participantes en el estudio.

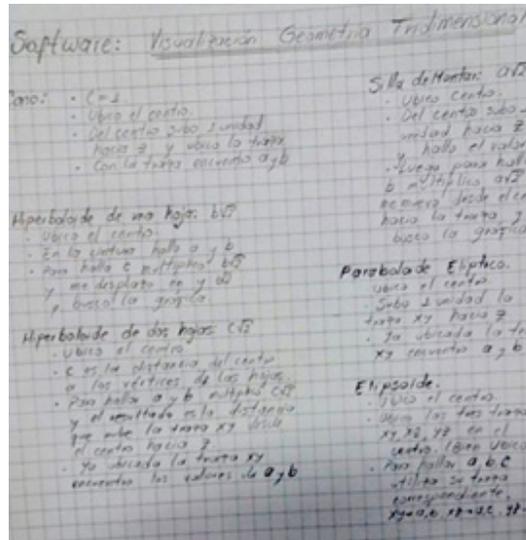


Figura 5. Descripción de un estudiante de los pasos utilizados para resolver los problemas propuestos por el software GAnalítica3D

Fuente: elaboración propia.

Luego de analizar las estrategias propuestas por los estudiantes se observa en general que cuando ellos resuelven una tarea, proceden a identificar una sección plana que les pueda servir para anular de forma conveniente un término en la forma canónica, reduciendo de esta forma el problema tridimensional a uno bidimensional. Después, los estudiantes utilizan conceptos de geometría analítica plana con el propósito de establecer relaciones entre los parámetros de los términos que no se anularon con la curva formada por la sección plana; en este proceso, se observan habilidades por parte de los estudiantes relacionados con el conteo de unidades en los ejes de coordenadas, la descomposición de un sólido en secciones planas, establecimiento de relaciones entre términos algebraicos y elementos geométricos en el plano a través de la manipulación dinámica de los parámetros en el software y la manipulación algebraica de ecuaciones. Estas observaciones coinciden con las de Kaput (1992), en cuanto a la interacción dinámica que proporciona la tecnología para facilitar el aprendizaje.

A continuación, se describen en detalle las estrategias desarrolladas por los estudiantes en dos de las 49 tareas propuestas por el software GAnalítica3D.

Tarea 1. Situar el paraboloides elíptico $(z-l) = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$

Estrategia. Para el paraboloides elíptico cuya ecuación es $z - l = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$, se construye el plano $z = 1 + l$. Luego, al intersecar este plano con el paraboloides elíptico se genera una curva plana denominada *traza* (Hilbert et ál., 1999). Esta curva es una elipse y con su ecuación se pueden determinar los parámetros a y b (Figura 6).

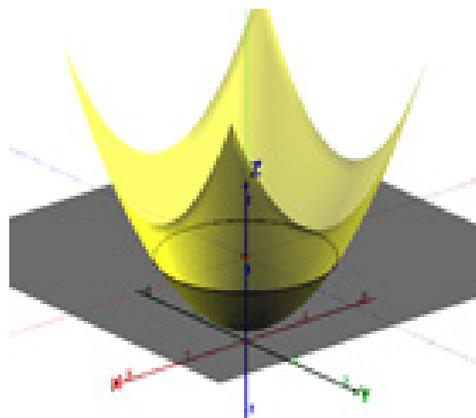


Figura 6. La intersección con el plano $z=1+l$ genera una elipse que permite identificar los parámetros a y b

Fuente: elaboración propia.

Tarea 2. Escribir los valores de h , k , l , a , b , c del hiperboloide de una hoja

Estrategia. El hiperboloide de una hoja tiene como ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$, la intersección del plano $z=l$, con el hiperboloide

genera una elipse que permite identificar los parámetros a y b . Posteriormente, al intersecar el hiperboloide con el plano $x=h+\sqrt{2}a$, se obtiene la hipérbola $\frac{(z-l)^2}{c^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, la cual tiene una distancia entre sus vértices de la forma $2c$, permitiendo así encontrar el valor de c (Figura 7).

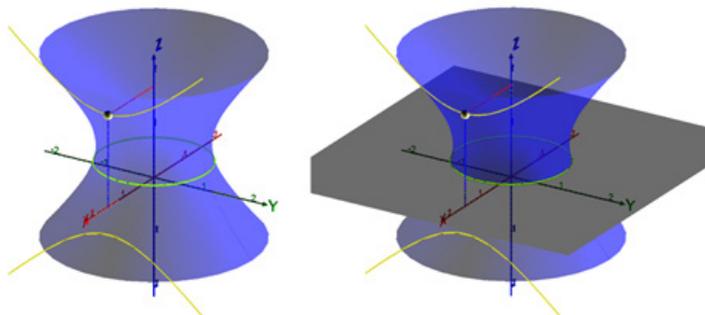


Figura 7. Visualización de la estrategia generada por los estudiantes para hallar los parámetros de la ecuación canónica de un hiperboloide de una hoja, dado la superficie

Fuente: elaboración propia.

GNalítica3D, al generar problemas automáticamente, permitió que los estudiantes trabajaran de forma autónoma e independiente en sus hogares; luego, de regreso al aula de informática, los estudiantes más avezados tuvieron la oportunidad de mostrar

su conocimiento ante sus compañeros, ya que cuantos más ejercicios resolvían, más ejercicios el *software* puntuaba correctamente. Así, la dedicación y la constancia de los estudiantes fueron elementos claves para consolidar su aprendizaje en torno a las tareas propuestas

por el *software*. Este resultado invita a reflexionar sobre la importancia de los talleres y las actividades extraclase en la consolidación del aprendizaje de conceptos matemáticos.

Los resultados muestran que, por una parte, los estudiantes aprenden procedimientos de manipulación algebraica y geométrica de superficies cuádricas promovidos por el *software* y por la instrucción del profesor, dando lugar a la adquisición de destreza en el uso de algoritmos eficaces. Y, por otra parte, los estudiantes comprenden que esos algoritmos son útiles, para qué sirve cada paso y lo que se obtiene en cada paso, dando significado a las expresiones y transformaciones algebraicas a través del reconocimiento geométrico visual de lo que se está manejando algebraicamente.

Con respecto a la prueba de conocimientos *a posteriori*, el conocimiento y comprensión por parte de los estudiantes del proceso a seguir en la resolución de las tareas propuestas por el *software*, les permitió resolver otros problemas semejantes aun cuando no se disponía de la ayuda del *software*. Los estudiantes adquirieron destreza en la resolución de problemas en los que se relacionaba la ecuación de una superficie cuádrica con su representación gráfica tridimensional. Este hecho se hizo evidente en los resultados de esta prueba (Tabla 2), en la que no se hizo uso del computador, donde el 70% de los estudiantes respondió satisfactoriamente la prueba en Química y el 90% de la Licenciatura en Matemáticas.

Tabla 2. Dificultades de los estudiantes (en porcentaje) en las respuestas al cuestionario *a posteriori*

	Licenciatura en Matemáticas	Licenciatura en Química
Estudiante con respuestas erróneas	10%	30%

Fuente: elaboración propia.

Al comparar los resultados de las tablas 1 y 2, se observa que los estudiantes de las dos licenciaturas han mejorado mucho su destreza en el uso de las representaciones algebraicas y geométricas de las superficies 3-dimensionales. Siempre es esperable una mejoría como resultado de cualquier intervención de enseñanza, pero, en nuestro caso, los resultados del cuestionario *a posteriori* indican que el *software* ha inducido una muy buena comprensión de los conceptos matemáticos utilizados en la mayoría de los estudiantes.

Los estudiantes manifestaron interés por el uso del *software* y de la metodología en general, motivación que quedó demostrada al utilizar el *software* como una actividad extra-clase. Cuando se les preguntó si habían utilizado *software* u otro contenido digital para aprender matemáticas en clases anteriores, algunos estudiantes de ambos grupos manifestaron utilizar *software* como Geogebra u otro *software* similar para reforzar y tratar de visualizar los conceptos de cálculo vistos

en clase. Todos los estudiantes manifestaron utilizar el video, como el recurso tecnológico más importante para reforzar lo visto en clase, aunque ni los videos ni el *software* usado por ellos fue sugerido como una estrategia o una actividad extra-clase por parte del profesor.

Conclusiones

El objetivo de este artículo es presentar resultados de una investigación didáctica en la que se diseñó e implementó una intervención didáctica, basada en la manipulación por los estudiantes de un *software* dinámico educativo 3-dimensional creado por los autores, para el aprendizaje de las superficies cuádricas en asignaturas de cálculo multivariado a nivel universitario.

Con respecto a la revisión teórica, al proceso de intervención en el aula, al proceso y método de análisis de la información recolectada y a los resultados obtenidos, el análisis de la actividad desarrollada por los estudiantes lleva a las siguientes conclusiones:

Este estudio permitió evidenciar cualitativamente que los estudiantes, tanto de Química como de Licenciatura en Matemáticas, lograron avances en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas por medio del *software* educativo mencionado. Así pues, una metodología de enseñanza enriquecida con *software* se presenta como una importante herramienta didáctica en la enseñanza de la geometría analítica tridimensional, ya que está complementa la labor del docente y permite que los estudiantes, inducidos por el incremento de la motivación que produce el computador, resuelvan más problemas en menos tiempo. Estos resultados coinciden con los encontrados en Acosta et ál. (2015).

Con respecto a los experimentos de enseñanza, se destaca cómo el *software* les permite

a los estudiantes fácilmente poner en práctica los diversos conceptos que fueron discutidos en el aula de clase, tales como la ubicación de puntos en el espacio y la construcción de planos paralelos a los planos coordenados. De igual forma, se destaca cómo el *software* y la manipulación de los objetos en el espacio tridimensional, les permitió a los estudiantes desarrollar habilidades en la formulación de estrategias, algoritmos y procedimientos paso a paso para obtener una solución esquemática de los problemas planteados por el mismo *software*.

Por lo particular de la elección de la muestra y su tamaño, los resultados no son directamente replicables, pero pueden ser de utilidad para el desarrollo de investigaciones con características similares en el estudio del uso didáctico de *software* en el campo de la enseñanza y aprendizaje de otras áreas de las matemáticas universitarias. Los resultados de esta investigación concuerdan con las de otros estudios realizados en contextos de matemáticas de nivel universitario, mencionados a lo largo del artículo, y añaden información sobre un contexto poco explorado, el de las superficies cuádricas, ayudando a mostrar que el uso de *software* dinámico educativo favorece la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas universitarias.

En compensación, es de destacar que, aunque los docentes no propongan el uso de algún *software* en el aula de clase, algunos estudiantes sí los utilizan en casa para reforzar lo aprendido y se apoyan en videos online para complementar su aprendizaje. En este sentido, es importante que los docentes reconozcan estas actividades extra clase, que identifiquen el *software* y los videos más adecuados y de esta forma les brinden a los estudiantes una mejor orientación sobre cómo utilizarlos en la consolidación del aprendizaje.

Agradecimientos

El presente artículo presenta resultado de investigación obtenidos en el marco del proyecto "Incorporación de recursos tecnológicos y contenidos educativos digitales mediante una estrategia de intervención pedagógica para el desarrollo de habilidades de visualización espacial en estudiantes de cálculo vectorial de la Universidad del Quindío", financiado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, la Universidad del Quindío y Colciencias a través del contrato CT 301-2017.

Referencias

- Abud, M. (2009). MelSE: Metodología de Ingeniería de Software Educativo. *Revista Internacional de Educación en Ingeniería*, 2(1), 10-18.
- Acosta, C., Hoyos, E. y Restrepo, L. (2015). Influencia de software educativo en la consolidación del sistema de numeración posicional. *Revista de investigaciones de la Universidad del Quindío*, 27(1), 109-119. <https://doi.org/10.33975/riuq.vol27n1.46>
- Arzarello, F., Ferrara, F. y Robutti O. (2011). Mathematical Modelling with Technology: The Role of Dynamic Representations. *Teaching Mathematics and its Applications*, 31, 20-30. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrr027>
- Caglayan, G. (2018). Coordinating Analytic and Visual Approaches: Math Majors' Understanding of Orthogonal Hermite Polynomials In The Inner Product Space $P_n(\mathbb{R})$ in a Technology-Assited Learning Environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 52, 37-60. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.006>
- Christou, C., Jones, K., Pitta-Pantazi, D., Pittalis, M., Mousoulides, N., Matos, J. F., Sendova, E., Zachariades, T. y Boytchev, P. (2007). *Developing student spatial ability with 3-dimensional applications*. [Manuscrito no publicado]. https://eprints.soton.ac.uk/45969/1/Christou_etc_spatial_ability_with_3D_software_2007.pdf
- Clements, D. H. y Battista, M. T (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Macmillan.
- Galvis, A. (1992). *Ingeniería de software educativo*. Ediciones Uniandes.
- Gonzato, M., Fernández, T. y Díaz, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, 77, 99-117.
- Guizado, F. y Cruzata A. (2017). Diagnóstico del empleo de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la electrónica en el área de la educación para el trabajo en secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis (TED)*, 41, 129-148. <https://doi.org/10.17227/01203916.6041>

- Gutiérrez, A., Pegg, J. y Lawrie, C. (2004). Characterization of Students' Reasoning and Proof Abilities in 3-Dimensional Geometry. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME28)* (Vol. 2, pp. 511-518). PME.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.
- Hernández, R. (2016). Errores matemáticos en el conocimiento procedimental al resolver problemas de superficies cuadráticas. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 8(1), 67-76. <https://doi.org/10.22335/rlct.v8i1.348>
- Hilbert, D. y Cohn-Vossen, S. (1999). *Geometry and the imagination*. Chelsea.
- Hoyos, E., Rincón, J., Trujillo, C., Acosta, C., Mesa, M. y Aristizábal, J. (2018). *Geometría analítica tridimensional*. Editorial Conexión Publicitaria S.A.S. https://sourceforge.net/projects/software-gedes/files/GAnalitica3D_Cartilla.pdf/download
- Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning Of Geometry. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-152). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4
- Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). MacMillan.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer R. (2006). Teaching and Learning Geometry With Technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on The Psychology of Mathematics Education: Past, Present And Future* (pp. 275-304). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_011
- Mota, J. F. y Laudares, J. B. (2013). Um estudo de planos, cilindros e quádras, na perspectiva da habilidade de visualização, com software winplot. *Bolema*, 27(46), 497-512. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300011>
- Olkun, S. (2003). Making Connections: Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 4, 1-10. <https://doi.org/10.1501/0003624>
- Sinclair, N. y Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 235-274). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_7
- Vasco, C. (1994). Sistemas geométricos. En C. Vasco (Ed.). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol. 2, pp. 53-54). Ministerio de Educación Nacional.
- Weisstein, E. (2008). Quadratic Surface. *Math World*. <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticSurface.html>

Para citar este artículo

Hoyos, E. A., Acosta, C. A., Aristizábal, J. H., Mesa, M., Trujillo, C. A., Rincón, J. A., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2021). Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (49), 123-142. <https://doi.org/10.17227/ted.num49-9574>

