GEOMETRIA Y FÍSICA

Mauricio Mendivelso V.
Departamento de física Universidad Pedagógica Nacional

Abstract

The relation between Euclidean geometry and classical physics is a well-know one. However, this relation is extended beyond limits of this geometry and it becomes so intimate that it is impossible to unbind the description of structure of Un/verse from its geometrical description. This essay is looking for an approach fo the outcoming of non-Euclidean models and their relation to concret physical problems.

RESUMEN

Es bien conocida la relación que guardan la geometría euclidiana y la física clásica. Sin embargo, dicha relación se extiende más allá de los limites de este sistema y llega a ser tan intima que es imposible desligar la descripción de la estructura del Universo de su descripción geométrica. Este ensayo busca un acercamiento a la aparición de los modelos no euclidianos y su relación con problemas físicos concretos.

1. INTRODUCCIÓN

La ciencia goza del favor de herramientas formales como medio fundamental para la descripción completa de un sistema natural, entre las cuales la geometría juega un papel fundamental. Intento explorar aquí las características y alcances de la relación entre los dos saberes. Para cumplir con dicho objetivo reviso, en primera instancia, a aparición de la geometría euclidiana, su estructura y su relación con la descripción del mundo físico. En un segundo apartado, la aparición de las geometrías no euclidianas como consecuencia del estudio de un aparente error de observación por parte de Euclides y el intento de varios académicos por confirmar o desvirtuar dicho error. Algunos estudiosos interesados en el tema como K. F. Gauss y B. Riemann decidieron prescindir de la parte de la teoría que generaba el problema (y de algunas otras de sus ideas originales) y desarrollaron una nueva geometría llamada riemanniana que intento abordar en una tercera parte y finalmente muestro cómo el problema geométrico se relaciona directamente con un problema físico particular: el contenido de masa del Universo.

2. EL MUNDO SEGÚN EUCLIDES

Hacia el siglo V a.C. Euclides se constituyó en uno de los pensadores más determinantes en el desarrollo ulterior de la ciencia. En su libro Elementos, reúne el trabajo de varios pensadores griegos y egipcios y a lo largo de trece tomos muestra los fundamentos de lo que hoy conocemos como geometría. El trabajo de Euclides no fue solamente compilatorio sino de estructuración, pues organizó todas aquellas ideas en un sistema deductivo relativamente sencillo. Entre los aspectos más relevantes de su obra aparecen los postulados o axiomas, ideas que sirven de punto de partida para estudiar las propiedades y relaciones entre los elementos necesarios para el estudio del espacio como puntos o líneas. Euclides consideró que ideas como

Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio o

Si dos líneas son cortadas por una tercera y los ángulos interiores suman menos que dos rectos, las dos líneas se cruzan en el mismo lado de los ángulos

eran lo "suficientemente evidentes" (Prenowitz y Jordan, 1965) como para tener que ser demostradas (y por esto llamados "postulados"). Basada en estas ideas, su obra explora las consecuencias de relacionar unos postulados con otros a través de ideas que llamamos teoremas.

Conocemos suficientemente bien la utilidad de dichas ideas en la formulación de la física clásica:

• El método de paralaje para la medición de distancias.

• El procedimiento vectorial usado para determinar el valor de las variables de un sistema en determinado instante, que depende del concepto de equipolencia.

• La descripción geométrica del comportamiento de la luz cuando se refracta.

• Las leyes de Kepler, que rigen el movimiento planetario.

son ideas cuya definición depende del segundo postulado citado atrás, al que llamaremos Quinto Postulado (reformulado después por Playfair enunciando que *Por un punto externo a una línea recta pasa solamente una recta paralela).* La primera Ley de Newton introduce de manera estratégica la geometría euclidiana como marca natural de trabajo afirmando que, bajo ciertas condiciones, una partícula recorre "espacios iguales en tiempos iguales. Cuando habían pasado más de veinte siglos, la sociedad académica había "tan erróneamente llegado a confundir la geometría euclidiana con la verdad absoluta" (Asimov, 1987) que se llegó a dar el carácter de natural e incluso de divina a la geometría de Euclides.

La aparente belleza conceptual y estructural de la geometría euclidiana tenía en algunos matemáticos árabes firmes antagonistas. Omar Khayyam encontraba particularmente poco intuitivo el Quinto Postulado y recogiendo la inquietud de otros matemáticos árabes, trató de mostrar que el Quinto Postulado podía deducirse de los otros. Para esto utilizó un cuadrilátero en el que los ángulos de la base son rectos e intentó demostrar que los dos ángulos que no están en la base son rectos también (de lograrlo, mostraría que el Quinto es verdadero pero no postulado). Sin embargo, sólo encontró que se puede demostrar igualdad pero no que son rectos. La idea fue retornada años después por un sacerdote jesuita llamado Gerolamo Saccheri.

3. EUCLIDES LIBERADO DE TODA IMPERFECCIÓN

Este sacerdote, profesor de matemática de la Universidad de Pisa emprendió el mismo programa de los árabes intentando probar que el Quinto Postulado era verdadero y consecuencia directa de los otros postulados. Su línea de raciocinio, publicada en su escrito *Euclides ab omni naevo vindicatum,* empezó suponiendo que los ángulos del cuadrilátero de Khayyam que no están en la base eran obtusos. Rápidamente Saccheri encontró contradicción en los teoremas (Gray, 1992) lo que le dio la confianza suficiente para buscar algo similar si consideraba que los ángulos eran agudos. Sin embargo, a medida que Saccheri iba pasando de proposición en proposición en su geometría aguda, su sentimiento de satisfacción empezó a ser sustituido por una creciente inquietud, ya que no tropezaba con ninguna contradicción'. (Asimov, 1987).

Corrían los años intermedios del siglo XVIII y la humanidad se enfrentaba al inexplorado mundo de la geometría neutral (la misma construcción de Euclides pero prescindiendo del Quinto Postulado). Saccheri no dio crédito a la falta de contradicción de la geometría aguda y al no poder extraer más conclusiones afirmó que el único valor posible para cada uno de los dos ángulos era el de uno recto. Sin embargo esta conclusión fue, a todas luces, errónea. Saccheri dio por concluido el tema pero algunos otros no pensaron lo mismo. Durante los ciento cincuenta años siguientes a la renuncia de Saccheri "a la inmortalidad" varios intentaron encontrar la inconsistencia en la suposición del ángulo agudo que Saccheri erróneamente creyó encontrar (da la impresión que no muy convencido de ello) entre los que se cuentan John Wallis, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace y Adrien Marie Legendre. Algunos de estos prefirieron buscar un postulado alternativo al Quinto de Euclides sin mucho éxito.

Los trabajos de estos académicos llegaron a las manos de los que se consideran los gestores de este nuevo mundo de ideas: Janós Bolyai y Nicolai Ivanovitch Lobachevskii. Por caminos separados, retomaron el trabajo de Saccheri justo donde lo dejó y evaluaron la posibilidad de crear una teoría autoconsistente sin Quinto Postulado Euclidiano, reemplazado este por la suposición de que hay más de una paralela que pasa por un punto externo a una recta dada. Una construcción de estas se conoce actualmente como geometría hiperbólica o de Lobachevskii, conjunto de ideas que para algunos autores (Santaló, 1977) carece de utilidad física alguna a pesar de ser matemáticamente correcta y libre de contradicción.

Dada la dificultad para visualizar los aspectos geométricos desarrollados por Lobachevskii, Henri Poincaré desarrolló un modelo didáctico donde el Quinto Postulado de Lobachevskii y los otros postulados euclidianos se pueden verificar. En este modelo, el espacio está compuesto por todos aquellos puntos del semiespacio complejo positivo (parlo que no se incluyen los puntos Im(z) = 0). Las líneas Euclideas son líneas paralelas (en el sentido euclidiano) al eje Re(z) = 0 o semicircunferencias perpendiculares a ese mismo eje (entendiendo como *semicircunferencia perpendicular* la figura trazada en el semi espacio complejo, donde el eje Re(z) = 0 pasa por su centro). Este modelo permite redefinir la distancia entre dos puntos (llamada Razón Doble de Cuatro Puntos) que es el elemento esencial para un espacio.

A mediados del siglo XIX dos matemáticos alemanes Karl Friedrich Gauss y Bernhard Riemann, retornaron la hipótesis del ángulo obtuso e intentaron crear una nueva geometría y encontraron, por aparte, que esta tarea es posible renunciando, además, a algunas otras ideas de la geometría euclidiana.

4. EL MUNDO SEGÚN RIEMANN

El nombre de riemanniana para esta nueva geometría nace de la evolución histórica de la idea de Saccheri. El trabajo de Bolyai y Lobachevskii mostró cómo es posible la existencia de una teoría libre de contradicción reemplazando el Quinto Postulado, esto es, la unicidad de las paralelas, por un Quinto Postulado alternativo, donde la paralela a una línea no es única. Sin embargo, como lo mostró Saccheri, pensar en la no existencia de una paralela estaba fuera de poder establecer una nueva geometría. Riemann y Gauss encontraron que esto si era posible si se rechazan algunos otros postulados como la unicidad de la recta que pasa por dos puntos distintos.

El modelo creado por estos matemáticas alemanes se puede apreciar trazando elementos euclidianos sobre una esfera de radio R, pues la distancia entre dos puntos ya no es una recta euclidiana sino una línea curva euclidiana, que pertenece a una circunferencia igualmente de radio R. En este espacio, por ser la distancia más corta entre dos puntos, dicha línea se llama geodésica (como se le llama en general a la distancia más corta entre dos puntos. En el espacio euclidiano la geodésica corresponde a una línea recta). Las líneas ya no son infinitas, pues una circunferencia es una línea que a pesar de ser ilimitada es finita.

Sin embargo, el problema contemplado inicialmente por Gauss y luego por Riemann es mucho más general. Contemplan cada superficie como un posible espacio y las características de la geodésica en tal superficie depende de las características de la superficie. El programa riemanniano caracteriza la distancia entre dos puntos a través de una cantidad llamada tensor métrico, con lo cual deja claro que la menor distancia entre dos puntos depende de las propiedades de la superficie.

5. EL ESPACIO Y LA MATERIA

Estas dos geometrías no euclidianas poseen una gran riqueza matemática, están libres de contradicción y cumplen con la tarea que emprendieron otros matemáticos: probar que Euclides no se apresuró cuando consideró el Quinto como postulado. Pero a pesar de su gran contenido formal, la relación física-matemática era pobre. Esta situación cambió en los primeros años del siglo XX, cuando menos para el programa riemaniano.

Albert Einstein desarrollé un modelo para explicar la atracción gravitacional en el cual, a diferencia del de Newton, dicha interacción no sería un problema de acción a distancia sino de geometría (Bekenstein 1993). Para Einstein, la materia modificarla las posibles trayectorias sobre las cuales se podría mover una masa de prueba debido a la presencia, en su vecindad, de otras masas. Marcel Grosmman encontró útil describir dicha modificación haciendo las propiedades del tensor métrico dependientes de la masa, con lo cual, la geometría de Riemann se constituye en la más adecuada para describir el espacio. En ausencia de masa, las propiedades del tensor métrico son tales que la distancia entre dos puntos corresponde nuevamente a la euclidiana, con lo que la Relatividad General (el trabajo de Einstein y Grossman) deja la geometría euclidiana como un caso particular de la geometría de Riemann.

Más allá, existe en astrofísica un problema denominado “La discrepancia de las masas”. Observando la velocidad de rotación de las galaxias espirales, Jean Oort y posteriormente Fritz Zwicky (Bosma, 1998) (Loh y Spillar, 1986), encontraron que la dependencia entre la velocidad de rotación de una galaxia espiral y la distancia de las estrellas a su centro, predicha perla teoría newtoniana, no corresponde a la observada, de tal forma que una correspondencia aceptable entre las dos cosas exige una cantidad de materia mayor. Sí la misma exploración se hace en sistemas más grandes (cúmulos de galaxias, supercúmulos y el universo mismo) esta discrepancia se hace mayor.

La hipótesis de la Materia Oscura (DMH) formula la existencia de materia en el Universo que no irradia en ninguna longitud de onda, formada por partículas exóticas o formada por partículas bariónicas como las que componen la materia normal pero de temperatura muy baja (Edery, 1 999)(Wyse y Gilmore, 1995). Son bastante importantes las incidencias que esta hipótesis tiene sobre la estructura del Universo y la geometría que la describe.

La estructura y el destino del Universo atañen directamente a la DMH. Si la cantidad de materia que hay en el Universo es la que se observa a través del brillo de las estrellas, el Universo es abierto, se expandirá por siempre con lo cual la forma del espacio tridimensional es análoga a la de un espacio bidimensional hiperbólico para cuya descripción es adecuada la geometría de Lobachevskii. Sin embargo, si la cantidad de materia es mucho más grande que la que se observa, el Universo es cerrado con lo cual cesará su expansión y volverá a cerrase sobre si mismo. La geometría adecuada para este tipo de espacio es la que describe una superficie análoga como una esfera, es decir, la geometría de Riemann. Sin embargo, algunos autores (Krauss, 1987) se inclinan a creer que la cantidad de materia que frenará la expansión del Universo es la justa como para detenerla y no generar posteriormente una contracción. Tal espacio se denomina plano y para describirlo se usa la geometría euclidiana, a pesar de que localmente la geometria más adecuada es la de Riemann.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arfken, G.,1999. *Mathematical Methods for Physicist* New York: Academic Press.

Asimov, I., 1987. *La edad del futuro.* Barcelona: Plaza & Janes.

Bekenstein, J.,1993. *Physics Review D.* 48, 364.

Bosma, A.,1998. astro-ph/9812015.

Edery, A., 1999. *Physics Review Letters.* 83, 3990.

Gray, J., 1992. *Ideas de espacio madrid: Mondadori.*

Jammer, M., 1970. *Conceptos de espacio.* México: Grijalbo.

Krauss, L. M.,1987. *Investigación y Ciencia.* 125, 30.

Loh, E. and Spillar, E.,1986. *Astrophysical Journal 307,* L1.

Prenowitz, W. and Jordan, M., 1965. *Basic Concepts of Geometry London:* Blaisdell.

Santaló, A, 1977. *Geometría no euclidiana.* Buenos Aires: EUDEBA.

Visconti, V., 1992. *Introductory Differential Geonmetry for Physicist* Singapore: World Scientific.

Wyse, R. and Gilmore. G., 1995. *Physics World 6,* 39.