



Uso y refinamiento de representaciones semióticas para estudiantes de licenciatura en Matemáticas

- Use and Refinement of Semiotic Representations for Undergraduate Students in Mathematics
- Uso e refinamento de representações semióticas para alunos de graduação em matemática

Resumen

Este artículo presenta los resultados de un trabajo de investigación, cuyo interés es caracterizar manifestaciones del uso y refinamiento de representaciones semióticas, en el proceso de institucionalización de estudiantes para profesor de matemáticas, cuando formulan y prueban conjeturas asociadas a los números naturales. Para ello, se realiza una red teórica que permite relacionar coherentemente la resolución de problemas como metodología, la teoría de situaciones didácticas, los elementos del proceso de institucionalización, así como el lenguaje como parte de la configuración cognitiva según el enfoque ontosemiótico y los sistemas de representación semiótica de Duval (2004). En cuanto a la metodología, se adoptó la investigación-acción, analizando el proceso de resolución de un grupo de estudiantes durante cuatro sesiones. De esta forma, los resultados dan cuenta de una propuesta fundamentada en la resolución de problemas que permite una aproximación al saber cultural desde los conocimientos desarrollados por los estudiantes en el proceso de resolución, en el cual se interviene el uso y refinamiento de representaciones semióticas.

Palabras clave

Resolución de problemas; institucionalización; lenguaje; representaciones semióticas

Brandon Ayala-García* 

* Licenciado en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Maestrando en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, D. C., Colombia. beayalag@correo.udistrital.edu.co



Abstract

This article presents the results of a research project whose aim is to characterize manifestations of the use and refinement of semiotic representations in the institutionalizations process of students becoming mathematics teachers, when they formulate and prove conjectures associated with natural numbers. For this, a theoretical network is constructed that allows for coherent connections relating Problem Solving as a methodology, Theory Didactic Situations, the elements of the institutionalization process, as well as the language as part of the cognitive configuration according to the Onto semiotic Approach and the semiotic representation systems of Duval (2004). Regarding the methodology, action research was adopted, analyzing the resolution process of a group of students during four sessions in which the researcher was their teacher. The results show a proposal based on Problem Solving that permits an approximation to the cultural knowledge from the knowledge developed by the students in the resolution process, in which it intervenes the use and refinement of semiotic representations.

Keywords

problem solving; institutionalization; language; semiotic representations

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de um trabalho de pesquisa, cujo interesse é caracterizar manifestações do uso e refinamento de representações semióticas, no processo de institucionalização de alunos para professores de matemática quando formulam e comprovam conjecturas associadas a números naturais. Para isso, é feita uma rede teórica que permite relacionar de forma coerente a Resolução de Problemas como metodologia, a Teoria das Situações Didáticas, os elementos do processo de institucionalização, bem como a linguagem como parte da configuração cognitiva segundo a Abordagem Ontossemiótica e os sistemas de representação semiótica de Duval (2004). Quanto à metodologia, adotou-se a pesquisa-ação, analisando o processo de resolução de um grupo de alunos durante quatro sessões, no qual o pesquisador foi o professor. Desta forma, os resultados mostram uma proposta baseada na Resolução de Problemas que permite uma aproximação ao conhecimento cultural a partir dos conhecimentos desenvolvidos pelos alunos no processo de resolução, no qual intervém o uso e refinamento das representações semióticas.

Palavras-chave

resolução de problemas; institucionalização; linguagem; representações semióticas

Introducción

Las matemáticas pueden entenderse como construcciones humanas que son producto, en términos de Alcalá (2002), de un pensamiento representacional que nos caracteriza. Es decir, nos comunicamos con otros, nos desenvolvemos en el mundo, aprendemos de él y lo comprendemos, a partir de representaciones de objetos que aluden y dotan de significado a los objetos mismos. Esto ha suscitado un interés particular por el carácter simbólico de las matemáticas y más aún, por la importancia y el papel que juega en su proceso de enseñanza-aprendizaje, siendo notable la evolución de la semiótica en el campo de la educación matemática.

El carácter simbólico de las matemáticas y su interés tampoco se desligan de otros problemas de gran relevancia para el campo de la educación matemática, pues como lo menciona Alcalá (2002), dicho campo se encuentra en un constante debate didáctico donde es visible el relacionamiento del lenguaje con tendencias metodológicas de diversa orientación, como es el caso de la resolución de problemas (RP).

Esta última se entiende en un sentido amplio, desde Bohórquez (2020), como una metodología de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas o como fundamento de un ambiente de aprendizaje caracterizado por

la conformación de una comunidad de aprendizaje que involucra al profesor, a los estudiantes y al objeto matemático o didáctico que tiene como meta común compartida la resolución de un problema matemático y sus transformaciones, acompañado de momentos de metacognición colectiva y de procesos de socialización de la fase de resolución del problema. (p. 67)

Así, cuando la RP es asumida como metodología, en particular en la formación de profesores, es posible identificar la relevancia otorgada al lenguaje matemático. Por ejemplo, en la Licenciatura en Matemáticas (LEMA), proyecto adscrito a la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, los problemas son entendidos como “instrumentos en el aprendizaje, cuyo potencial radica en las prácticas de matematización, modelación, conjeturación y demostración de propiedades matemáticas, mediante el uso del lenguaje y representaciones matemáticas en que se involucran los resolutores” (Bohórquez, en prensa; citado por Licenciatura en Matemáticas [LEMA], 2017, p. 28).

Esto supondría que al finalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje los estudiantes de licenciatura hayan construido un saber matemático que se fundamenta en la pragmática del lenguaje formal de esta disciplina, caracterizada, según Alcalá (2002), por formas de proceder, basadas en la concisión, precisión, logicidad y tendencia a la demostración, propias del ámbito matemático.

No obstante, como se mostrará en un apartado posterior, se identifica que si bien existe una relación entre aspectos del lenguaje matemático y la RP como metodología, al parecer dicha relación se plantea en general desde la importancia que tienen estos aspectos sobre la RP, específicamente en el proceso de resolver problemas matemáticos, y no en dirección inversa. Es decir, hay poco énfasis en dar cuenta de posibles formas para llevar a cabo propuestas fundamentadas desde la RP, que posibiliten la transición de los conocimientos desarrollados en el proceso de resolución, a un saber institucional o cultural soportado en un lenguaje propio del ámbito matemático.

Este hecho lleva a reflexionar sobre el proceso de la RP y en particular en una de sus fases. Aquella en la que luego de la presentación del problema y el desarrollo de la resolución, se comparten y discuten los distintos abordajes con el fin de brindar a los estudiantes un mayor panorama de los conocimientos matemáticos involucrados en el problema y se busca la consolidación de estos como un saber matemático culturalmente constituido —responsabilidad que asume en mayor medida el docente—. Lo que desde perspectivas como la teoría de situaciones didácticas (TSD) se ha conceptualizado como institucionalización.

De esta manera, en el marco de la investigación de la tesis de maestría que aquí se presenta, se asume la institucionalización como un proceso más que como una fase final de la RP (Margolin, 2009) y se consideran algunos elementos del enfoque ontosemiótico EOS que permiten estudiar dicho proceso como un conjunto de prácticas en el que se involucra diversas entidades primarias, entre ellas el lenguaje que soporta y expresa las demás entidades primarias (Godino *et al.*, 2008), por medio de representaciones semióticas (Duval, 2004).

Lo anterior en aras de abordar la pregunta: ¿cómo se manifiesta el uso y refinamiento de representaciones semióticas (URRS) en el proceso de institucionalización, cuando estudiantes de licenciatura en Matemáticas formulan y prueban conjeturas asociadas a los números naturales? En consecuencia, se aborda también el objetivo general que tiene que ver precisamente con caracterizar las manifestaciones de los estudiantes durante dicho proceso. Se aclara que la “manifestación del uso” se entiende en un sentido literal, como la acción de poner en evidencia representaciones en las producciones de los estudiantes relativas a la resolución de un problema. Producciones que pueden darse de manera escrita, verbal, mediada por un *software*, entre otras.

Antecedentes

Para el desarrollo de la investigación se llevó a cabo una revisión documental que pretendía indagar por la relación entre la RP y el lenguaje matemático. De esta manera, se pueden traer a colación algunos trabajos que permiten identificar la importancia dada a procesos y aspectos propios del lenguaje, cuando se implementan propuestas de enseñanza-aprendizaje según esta metodología.

Algunos de estos trabajos enfatizan en procesos como la comunicación o argumentación, por ejemplo, García (2014) realiza un bagaje teórico para determinar cómo se puede mejorar el desempeño en matemáticas de los estudiantes desde un enfoque comunicativo y del lenguaje, destacando algunos aportes que se han realizado desde la RP, los cuales muestran la importancia que tienen las representaciones de diversa naturaleza, así como la interacción con, y entre estudiantes para la comprensión de un problema, su resolución y en consecuencia para el aprendizaje de las matemáticas.

Por su parte, Jiménez y Pineda (2013) reflexionan respecto a la necesidad de generar ambientes centrados en estrategias de comunicación, en las que prime la interacción social, el trabajo en grupo y el uso de heurísticas, pues manifiestan que especialmente en matemáticas, los docentes y los estudiantes deben manejar un lenguaje adecuado para comunicarse e interactuar entre ellos; una perspectiva similar es desarrollada en los trabajos de Suárez *et al.* (2010) y Puga *et al.* (2016).

En cuanto a la argumentación, Berciano *et al.* (2017), con base en los tipos de aprehensión de Duval (1998), exponen las estrategias de razonamiento y argumentación de un estudiante inmerso en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la RP; sus resultados indican que, dada la intervención de la docente, hubo una mayor comprensión de los conceptos matemáticos por parte del estudiante y un mejor uso de las estrategias en mención.

Otros documentos, dan a conocer los logros obtenidos en la gestión de propuestas didácticas fundamentadas en la RP, con relación a la modelación, el planteamiento y resolución de ecuaciones, la construcción de significados y resignificación de objetos matemáticos (Maquillón, 2016; Leal y Arenas, 2018). Finalmente, se pueden mencionar algunos estudios que enfatizan en la semiótica y su papel en el aprendizaje de las matemáticas, a partir de la identificación y análisis de dificultades y errores de estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de un problema (Rojas, 2014; Garzón, 2015; Mejía, 2018).

Marco teórico

Abordar la pregunta y objetivo propuestos precisa una construcción teórica que, por una parte, permita explicar qué se entiende por RP,

su relación con la TSD, la institucionalización y sus elementos principales y, por otra parte, que dé cuenta de la pertinencia de asumir algunos aspectos propios del EOS para analizar la institucionalización y en particular el URRS que allí se manifiestan.

La RP como metodología o fundamento de ambientes de aprendizaje

Distintos autores han coincidido en que la RP puede entenderse de diversas maneras, más aún, plantean que no hay una caracterización universalmente aceptada (Bohórquez, 2016), a pesar de ser un tema de bastante importancia para la educación matemática.

Según Fonseca y Alfaro (2010), la RP se ha considerado tradicionalmente como una herramienta de evaluación o aplicación de los contenidos matemáticos que han sido estudiados con anterioridad: “Bajo esta perspectiva, el conocimiento se presenta parcelado, y el resolver un problema se limita a proporcionar una respuesta predeterminada” (p. 177).

Sin embargo, estos autores conciben una perspectiva diferente en la que la RP es entendida como una estrategia metodológica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La cual guarda estrecha relación con una de las agrupaciones de los enfoques de la RP que plantea Rojas (2014), a saber, como fuente y ocasión de aprendizaje. En esta, la forma de trabajar se caracteriza por partir de uno o varios problemas que lleven a reconocer la necesidad de conceptos o procedimientos. El problema, entonces, es asumido como fuente del desarrollo del pensamiento matemático, y el estudiante, por medio de la interacción con otros, adquiere y construye saber.

Una caracterización más profunda al respecto —asumida en el desarrollo de este trabajo— es realizada por Bohórquez (2020). Para este autor, un ambiente fundamentado en la RP se destaca por:

- Conformar una comunidad entre docentes y estudiantes que involucra un objeto matemático y cuya finalidad compartida está orientada a la resolución de un problema.
- Establecer pautas en las que se requiera escuchar con atención tanto al maestro como a los estudiantes entre sí, y generar que estos últimos expresen sus ideas y expliquen sus razonamientos a partir de argumentos y pruebas relevantes.
- Identificar los conocimientos previos del estudiante; establecer tipos de orientación que fomenten diversos caminos de solución de la situación; intervenir a partir de los procesos y las ideas que los estudiantes han desarrollado en el proceso de resolución.

De esta manera, se da cuenta de qué se entiende por RP, en calidad de metodología de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas o fundamento de ambientes de aprendizaje, y se permite justificar el enfoque metodológico de (RP) que se ha considerado pertinente para el desarrollo de la investigación.

La TSD y la institucionalización

Esta caracterización de la RP permite inscribir a la TSD en esta perspectiva metodológica. Fonseca y Alfaro (2010), por ejemplo, establecen que desde esta teoría se ha avanzado en la RP gracias al estudio de elementos cognitivos complejos más allá de las heurísticas, lo cual se sustenta y profundiza con el modelo de la RP propuesto por Margolinas (2009), en el que resolver un problema consiste en abordar una pregunta que puede ser más o menos trivial, según el problema planteado y los conocimientos del sujeto que pretende buscar una respuesta. Así, la finalidad de la resolución es responder la pregunta mediante un posible trabajo matemático.

Algunos aspectos de especial relevancia en la comprensión de la TSD, que se considera importante diferenciar en el presente trabajo, es el de situación, fase y proceso. En relación con el primero Brousseau (2007) establece que:

Una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado, el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen del uso de un conocimiento preciso. (p. 17)

Una fase puede ser entendida como “un momento del desarrollo efectivo de las acciones del profesor o del alumno. En una perspectiva de “observación”, “una fase no es en general analizable *a priori*, pero sí *a posteriori*” (Margolinas, 2009, p. 92). Por su parte, el proceso está asociado a una idea de “proyecto”,

visto como la representación de la finalidad de una situación en la que se encuentra el sujeto, de manera general, el proceso se entiende como un conjunto de fenómenos activos y organizados en el tiempo.

Finalmente, con respecto a la institucionalización, Margolinas (2009) explica cómo inicialmente fue entendida como una situación —de igual naturaleza que las de acción, formulación o validación¹— y posteriormente como una fase. Sin embargo, menciona que si se tratara de una situación, las limitaciones serían analizables *a priori* en términos de opciones y finalidades y la cuestión sobre cuándo inicia esta fase en las discusiones colectivas que se tienen bajo el control del docente perdería sentido. En consecuencia, establece que

es un proceso, es decir, que el profesor, incluso fuera de las fases de institucionalización, tiene un proyecto que le permite conducir a las fases de institucionalización sin ruptura de sentido. En el desarrollo de la secuencia, ese proyecto necesita la utilización de conocimientos que funcionen como criterios de validez² y permitan una descontextualización progresiva. (Margolinas, 2009, p. 178)

Aparte de esto, Margolinas (2009) considera que la validez de una fase de institucionalización se debe a un proceso de institucionalización en el que se identifican tres aspectos fundamentales, los cuales han sido asumidos como elementos de análisis en aras de abordar el objetivo propuesto, estos son:

- *Abandono* progresivo de la validación por el medio exterior para asumir una validación utilizando los criterios de validez.
- *Formulación* de los conocimientos por parte de los alumnos, en situación de formulación o en fase de balance.
- *Control* por parte del profesor, *a priori* o en fase de balance, de la posibilidad de una fase de institucionalización.

Un último aspecto relevante para el estudio tiene que ver con las puestas en común, pues se entiende, desde Santos (2016), que:

El lugar natural del proceso de institucionalización son los momentos que llamamos puestas en común. La puesta en común es un espacio dirigido y propuesto por el profesor donde después de una fase a-didáctica se organiza un intercambio de conocimientos con todo el grupo. (p. 23)

El lenguaje y su delimitación en la investigación desde el EOS

Por otra parte, el lenguaje como elemento principal del trabajo es entendido desde Rojas (2012) como una forma de comprender y describir el mundo y sus producciones y construir culturalmente significados. Pensamos y nos expresamos con y a través de él. Sin embargo, dado el interés de investigación, se hace hincapié en los sistemas semióticos que lo estructuran.

De esta manera, se asumen algunas herramientas desde el EOS (Godino, 2012), en aras de poder analizar las producciones de los estudiantes, en términos de sistemas de prácticas que se realizan en el proceso de institucionalización, lo que a su vez integra e interrelaciona un conjunto de objetos o entidades primarias. Godino *et al.* (2008) establecen la siguiente tipología:

- 1 La fase de validación se entiende como un momento en el proceso de resolución en el cual los estudiantes discuten y abordan los resultados obtenidos con el fin de establecer si estos convienen al problema planteado (Margolinas, 2009). Esta idea desprende el concepto de proceso de validación como las acciones que llevan a establecer dicha conveniencia relativa al problema.
- 2 Los criterios de validez, desde Margolinas (2009), refieren aquellos conocimientos o ideas utilizadas por los estudiantes en el desarrollo de la validación.

- *Elementos lingüísticos* - lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- *Situaciones* - problemas (aplicaciones extramatemáticas, tareas, ejercicios, etc.)
- *Conceptos* - definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, etc.)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.) (p. 7).

Se le da, entonces, mayor relevancia al lenguaje como entidad primaria —sin descuidar los demás elementos—, pues se entiende que este sustenta y expresa todas las demás entidades. Así, siguiendo los planteamientos del EOS, se estudia esta entidad a partir de los sistemas semióticos de representación de Duval (2004), perspectiva que permite establecer lo que se está entendiendo por URRS. Aspectos importantes para describir el uso y refinamiento de estudiantes de licenciatura.

URRS

Duval (2004) establece que un sistema de representación se convierte en un registro semiótico si posibilita tres actividades cognitivas vinculadas con la semiosis³:

1. Existencia de una representación identificable.
2. Tratamiento, cambio de representaciones en un mismo registro semiótico.
3. Conversión, cambio de representaciones cada una en registros semióticos distintos.

Además, Duval (2006) plantea que la naturaleza semiótica de las representaciones en la actividad matemática implica tener en cuenta las formas en las que se usan, como los requisitos cognitivos involucrados:

- Lo relevante es su propiedad de transformación, pues el procesamiento matemático siempre implica transformaciones entre representaciones. Además, esta transformación depende del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen. En ese sentido no hay una “mediación semiótica”, sino “mediaciones semióticas” bastante diferentes.

3 Aquí se entiende la semiosis desde el punto de vista de Duval (2004) como aquella actividad cognitiva que permite producir una representación semiótica.

- La actividad matemática requiere que, a pesar de utilizar diversos registros semióticos, solo se elija una según el propósito de la actividad. Esto quiere decir que es necesaria una *coordinación interna* entre los sistemas de representación. Sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto.
- *Conservación de orden de aprehensión entre unidades significantes*: la organización de las unidades significantes elementales de las representaciones nombradas conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica, según el mismo orden.

Al respecto de la importancia de las transformaciones entre representaciones semióticas, Oviedo *et al.* (2012) consideran que

el dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. (p. 24)

Luego se hace necesario para el aprendizaje en matemáticas que, al cambiar de representación en diferentes registros, haya una congruencia entre una y otra, es decir que las unidades significantes de cada representación se correspondan, independientemente del registro en el que se encuentre. Para ello se deben cumplir simultáneamente las siguientes categorías propuestas por Duval (2006):

- *Univocidad semántica terminal*: existe una correspondencia uno a uno entre las unidades significantes elementales tanto de la representación de partida como la de llegada.
- *Correspondencia semántica*: a cada unidad significativa simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significativa elemental de la otra representación.

En concordancia con estas ideas se entiende que, en el cambio de una representación X_1 a una representación X_2 , hay un refinamiento, si el proceso desarrollado en la transformación, o transformaciones —y en consecuencia las acciones semióticas involucradas allí— implican el dominio de normas sintácticas más sofisticadas las cuales son coherentes con el saber matemático, es decir, están sujetas o permiten aproximarse a formas de proceder compartidas culturalmente.

La idea de sofisticación aquí propuesta debe entenderse desde lo planteado por Bolaños (2015), quien propone que “un sistema de representación semiótico puede ser más potente cuando los signos empleados pueden ser reacomodados permitiendo realizar transformaciones de las representaciones iniciales, haciendo uso adecuado de las reglas propias al sistema” (p. 34). Por lo tanto, las reglas sintácticas usadas serán más sofisticadas si hacen parte de un sistema semiótico más potente.

De esta manera, el refinamiento de las representaciones dependerá del proceso desarrollado por el estudiante en las transformaciones requeridas y llevará a una representación de llegada en un sistema semiótico en el que se obtiene una ganancia respecto a la representación inicial y con la que “se puede dar una explicación del objeto representado” (Bolaños, 2015, p. 36). Sin que se entienda que es el refinamiento en sí mismo lo que permite la aproximación al saber, de hecho, esta última puede darse sin que haya necesariamente un proceso de refinamiento. Es el trabajo del estudiante con representaciones

más finas, que da lugar a argumentos, proposiciones, definiciones, conjeturas, etc. soportadas por un lenguaje (Rojas, 2012) y propias del objeto matemático, lo que podría generar una aproximación al saber. Entendiendo así el URRS, se abordó el primer objetivo específico de la investigación.

Metodología

El presente trabajo se enmarca en un estudio de tipo cualitativo, según las características que establece Vasilachis⁴ (2009). La población de estudio corresponde a un grupo de 22 estudiantes de LEMA-UD de primer semestre, quienes cursaban la asignatura Problemas de la construcción del número natural, espacio propicio para llevar a cabo la propuesta dado el marco metodológico que se propone desde el plan de estudios.

Con este grupo de estudiantes, el investigador asumió el rol docente no titular. Diseñó y llevó a cabo una intervención de nueve sesiones de clase, de dos horas cada una aproximadamente. Además, las situaciones y tareas propuestas estaban asociadas con los números triangulares. Se pretendía con estas que, por medio de la visualización, los estudiantes identificaran sucesiones de números y las representaran de otras maneras, establecieran conjeturas sobre sus propiedades y las probaran a partir de varios registros y representaciones.

En consecuencia, se asumieron algunos planteamientos de Elliot (2000) en relación con la investigación-acción desde donde se plantea la participación del docente como investigador con el propósito de comprender y describir los problemas que emergen de la práctica, a medida que se busca solventarlos.

Esto implica contemplar el problema desde el punto de vista de quienes están involucrados —docente-estudiantes— y, en consecuencia, cobra sentido que el diseño de los instrumentos y la misma recolección de datos esté fundamentado y promueva la interacción entre los sujetos de la investigación.

Se definió como técnica principal de recolección de información la observación participante que Munarritz (1992) describe en el marco de la investigación-acción, como la introducción del investigador al escenario de estudio, que a su vez funciona como instrumento de recolección de datos natural y no intrusivo. Desde esta técnica:

La relación investigador-participantes dará lugar a la obtención de un cuerpo de datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, el desarrollo de los fenómenos recogidos a través de descripciones detalladas de los sucesos observados por el investigador. (p. 9)

4 Dichas características tienen que ver con el quién y qué se estudia, las particularidades del método y la finalidad o meta de la investigación. Ver Vasilachis (2009, p. 25).

Por lo tanto, fue necesario la utilización de los siguientes recursos:

- Grabaciones de las sesiones de trabajo grupal con los estudiantes, desarrolladas en Google Meet, esto incluye las asesorías por grupos de trabajo.
- Producciones escritas de los estudiantes en relación con la solución de cada una de las situaciones o problemas propuestos.
- Conversaciones, discusiones o socializaciones en relación con los procesos de resolución de los problemas propuestos, los cuales pueden ser obtenidos mediante transcripciones de la grabación de la sesión de clase o realizadas en el chat de Google Meet.

Resultados y análisis

A partir de la recolección de información que había dejado la intervención de las nueve sesiones de clase, se inició el análisis teniendo como categorías el URRS y, los aspectos fundamentales del proceso de institucionalización. De las transcripciones de las sesiones, grabadas desde Google Meet, se escogieron las primeras cuatro para su análisis y las producciones de tres grupos de estudiantes,

esto porque permitían evidenciar un proceso de desarrollo en la resolución del problema propuesto y a su vez daban cuenta de las categorías seleccionadas.

Estas sesiones se dieron de la siguiente manera: 1) abordaje inicial de la situación, trabajo por parejas; 2) primera puesta en común; 3) intervención del docente a partir de la puesta en común, variación del problema inicial y trabajo por pequeños grupos; y 4) segunda puesta en común. A continuación, se presenta el análisis del trabajo realizado por uno de los grupos de estudiantes en cada una de las sesiones consideradas. Se inicia presentando fragmentos de la evidencia que corresponden a capturas de pantalla tomadas mientras los estudiantes compartían su resolución y a transcripciones de sus diálogos, donde se denota como E al estudiante y D al docente-investigador, posteriormente se enlistan a modo de síntesis los análisis bajo la categoría URRS y finalmente bajo los elementos del PI.

Primera sesión

Inicialmente, se presentó mediante diapositivas la sucesión figural —cada rectángulo de color, representa una regleta de Crusinaire— y los ítems que se muestran a continuación, mientras se explicaba verbalmente cada uno de ellos:

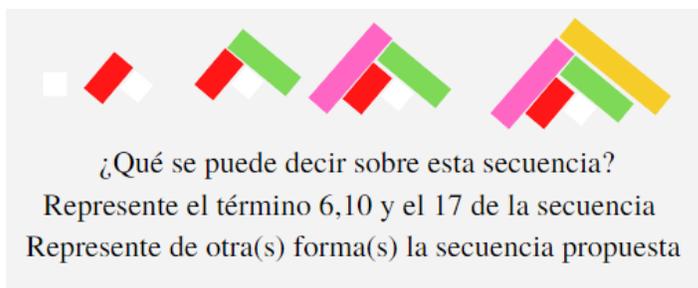
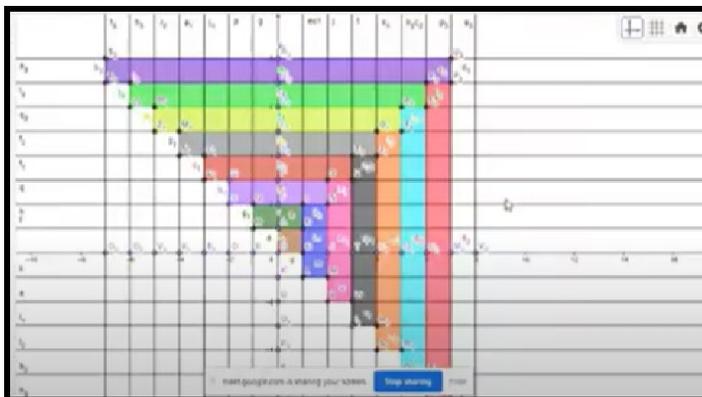


Figura 1. *Secuencia propuesta*

Fuente: elaboración propia.

Para el desarrollo de esta situación, se les solicitó a los estudiantes trabajar por parejas y unirse a un enlace de Google Meet, creado previamente por el docente-investigador, iniciando la grabación desde antes de su ingreso para tomar registro audiovisual y escrito (chat de la reunión) de las discusiones entre estudiantes y docente-investigador. Al no ser una puesta en común, solo se enfatiza en el URRS. Lo que se muestra en la figura 2 fue presentado por el grupo a analizar.



Figuras en
baja

Figura 2. Construcción de términos superiores de la secuencia propuesta

Nota. E: “Ya estaba intentando avanzar con generar una fórmula para representar la sucesión, como un término general.... entra en el tema que estamos viendo, digamos secuencias, entonces, hemos tenido un acercamiento a esto y ya que tenemos esa herramienta”.

Fuente: elaboración propia.

Análisis sobre el URRS: los registros de representación semiótica usados son el figural y el lenguaje natural. Los estudiantes realizan un tratamiento (Duval, 2004) de la representación inicial utilizando el software GeoGebra para obtener una construcción de los términos indicados por el docente-investigador. Su representación tiene la misma regla de conformación a la propuesta, es decir, para poder construirla han ido añadiendo regletas de un valor cuya diferencia con el anterior es una unidad.

Además, mencionan su interés por establecer una fórmula —representación simbólica— (Duval, 2004) que les permita “representar” la secuencia, un término general de la misma lo que podría llevar a un posible proceso de conversión (Duval, 2004) a futuro. Existe una relación con conocimientos previos (Bohórquez, 2020), lo cual se evidencia en lo expresado verbalmente por el estudiante.

Segunda sesión

Los estudiantes exponen los avances de su resolución del problema un día posterior a la presentación de este, se habla de la primera puesta en común y los estudiantes en cuestión manifiestan lo que se muestra en la figura 3.

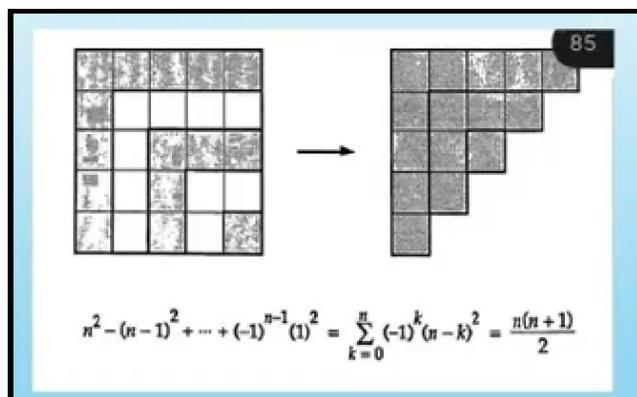


Figura 3. Representaciones distintas de la secuencia inicial encontradas por los estudiantes en un libro

Nota. E: "Sería reemplazar términos en la sumatoria, o sea, a partir de menos uno, a k , elevado a k , por n menos k elevado al cuadrado. ¿Sí me entiendes?"

Fuente: elaboración propia.

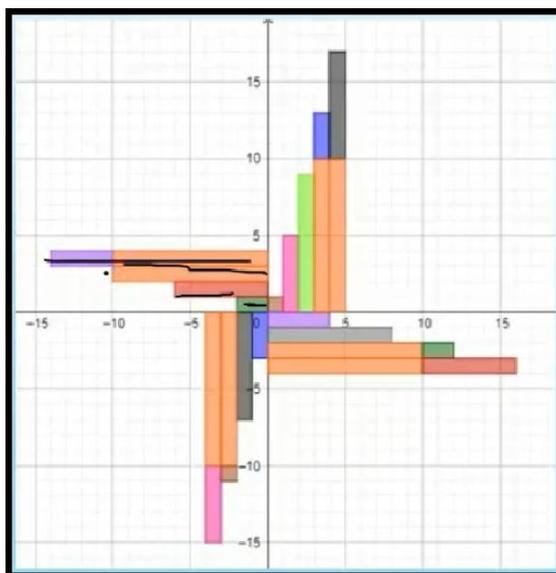


Figura 4. Tratamiento de la representación figural de la secuencia inicial, organizadas alrededor del plano cartesiano

Nota. E: "Iría rotando en dirección contraria a las manecillas del reloj, eh..., y bueno, algo que notamos de esta representación es que, eh..., siempre hay una diferencia de cuatro cuadrados por figura. Y explica a qué se refiere a medida que hace algunas marcas en la representación"

Fuente: elaboración propia.

Análisis sobre el URRS: en la figura 3, los registros usados son el figural y el simbólico (Duval, 2004). El uso de estas representaciones como distintas a la inicial, puede atribuirse a la asociación directa de la fórmula de Gauss y no

a un proceso de conversión propiamente, pues la intervención del estudiante muestra su confusión y carencia en el dominio de las transformaciones de tratamiento y conversión (Duval, 2004) necesarias para cambiar de representación.

En la representación de la figura 4 el registro semiótico es figural. A pesar de que esta representación se encuentra en el mismo registro semiótico que la secuencia inicial, los estudiantes son capaces de describir las transformaciones de tratamiento realizadas para construir una nueva representación. Se da lo que Duval (2006) define como tratamiento de visualización.

Logran abstraer y formular una propiedad que cumple la nueva representación construida, entendiéndolo como una ganancia del tratamiento (Bolaños, 2015). Sin embargo, aún no se puede hablar de refinamiento de representaciones: no se evidencia dominio de normas sintácticas más sofisticadas (Bolaños, 2015).

Análisis sobre los elementos del proceso de institucionalización: se identifica la formulación de conocimientos (Margolinas, 2009) por parte de los estudiantes en una fase de balance, pues los estudiantes se encuentran compartiendo sus procesos de solución frente a sus compañeros y el profesor, de forma que los conocimientos utilizados se discuten en aras de validarlos, lo que se observa en toda la intervención. Se evidencia la necesidad de síntesis y organización de información y de representaciones a mostrar en la puesta en común (Santos, 2016).

Esta fase se encuentra bajo el control del profesor (Margolinas, 2009), quien es el responsable de alimentar la discusión con el grupo expositor, por medio de preguntas que llevan a profundizar en el proceso de solución y en las estrategias que han utilizado para reflexionar sobre su validez.

Tercera sesión

El docente investigador retoma las formulaciones de los estudiantes de la primera puesta en común, se pretende que el conocimiento compartido por los estudiantes y que implica una representación numérica de la secuencia sea estudiado de manera tal, que a partir de los tratamientos y reglas sintácticas propias del registro simbólico (Duval, 2004) en el que se encuentra, los estudiantes puedan establecer conjeturas sobre las propiedades y características que cumplen estos números, por lo que se presenta esto como variación de la situación inicial.

D: “Podemos encontrar con varias de las estrategias que ustedes utilizaron, que muchos de ustedes utilizaron, podemos encontrar infinitos números que hacen parte de esta secuencia. Entonces, quiero que nos fijemos por un instante nada más en este conjunto de números [que el docente había escrito en el tablero virtual] y que comencemos a identificar o a establecer ciertas relaciones entre estos números. Para eso es que, digamos, que traje a colación el video”.

D: “Entonces, quisiera que por grupos de trabajo nos reuniéramos para pensar qué propiedades o características podemos encontrar de este conjunto numérico”.

Análisis sobre los elementos del proceso de institucionalización: se retoman las formulaciones de los estudiantes —representación simbólica— y a partir de ellas se propone una variación del problema (Panizza, 2003). Se puede relacionar con una

fase de balance, en la que se ve un proceso simétrico a la devolución (Santos, 2016); el docente retoma su posición ante el saber y, a partir de los conocimientos de los estudiantes, orienta su trabajo ampliando el problema inicial.

Se identifica el control por parte del docente (Margolinas, 2009) —posibilidad fase de institucionalización—: el interés del docente no es explicitar el saber involucrado en el problema, sino profundizar en otros elementos que les permita a los estudiantes descontextualizar

sus conocimientos y en consecuencia aproximarse cada vez más a ese saber, por medio del refinamiento de las representaciones iniciales.

Cuarta sesión

Durante esta sesión, segunda puesta en común, los estudiantes comparten la resolución desarrollada de la variación del problema inicial. Lo presentado a continuación corresponde al trabajo de dos grupos quienes se unen para abordar el nuevo problema.



Figura 5. Números triangulares como otra representación de la secuencia inicial encontrada por los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

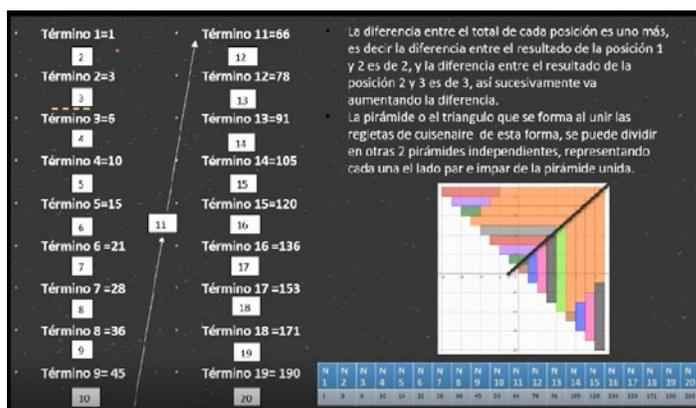


Figura 6. A la izquierda, representación simbólica de la secuencia inicial, se presentan en forma de tabla las diferencias entre los términos de la secuencia. A la derecha se enuncian algunas propiedades encontradas en la figura y en la tabla

Fuente: elaboración propia.

| | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $1=3 \times 0 + 1 = 1$ | $11=3 \times 22 = 66$ | $21=3 \times 77 = 231$ |
| $2=3 \times 1 = 3$ | $12=3 \times 26 = 78$ | $22=3 \times 84 + 1 = 253$ |
| $3=3 \times 2 = 6$ | $13=3 \times 30 + 1 = 91$ | $23=3 \times 92 = 276$ |
| $4=3 \times 3 + 1 = 10$ | $14=3 \times 35 = 105$ | $24=3 \times 100 = 300$ |
| $5=3 \times 5 = 15$ | $15=3 \times 40 = 120$ | $25=3 \times 108 + 1 = 325$ |
| $6=3 \times 7 = 21$ | $16=3 \times 45 + 1 = 136$ | $26=3 \times 117 = 351$ |
| $7=3 \times 9 + 1 = 28$ | $17=3 \times 51 = 153$ | $27=3 \times 126 = 378$ |
| $8=3 \times 12 = 36$ | $18=3 \times 57 = 171$ | $28=3 \times 135 + 1 = 406$ |
| $9=3 \times 15 = 45$ | $19=3 \times 63 + 1 = 190$ | $29=3 \times 145 = 435$ |
| $10=3 \times 18 + 1 = 55$ | $20=3 \times 70 = 210$ | $30=3 \times 155 = 465$ |
| $31=3 \times 165 + 1 = 496$ | $46=3 \times 360 + 1 = 1081$ | $61=3 \times 630 + 1 = 1891$ |
| $34=3 \times 198 + 1 = 595$ | $49=3 \times 408 + 1 = 1225$ | $64=3 \times 693 + 1 = 2080$ |
| $37=3 \times 234 + 1 = 703$ | $62=3 \times 459 + 1 = 1378$ | $67=3 \times 759 + 1 = 2278$ |
| $40=3 \times 273 + 1 = 820$ | $55=3 \times 513 + 1 = 1540$ | $70=3 \times 828 + 1 = 2485$ |
| $43=3 \times 315 + 1 = 946$ | $58=3 \times 570 + 1 = 1711$ | $73=3 \times 900 + 1 = 2701$ |

- El número 3 es clave, y es participe de muchas de las condiciones encontradas.
- En base a los resultados se encuentra una relación con los múltiplos de 3, a excepción de que cada 3 posiciones se presenta un valor al que se le debe sumar 1 para que siga cumpliendo esta condición.
- Las multiplicaciones que se realizan y las diferencias entre ellas son de uno más, y esto se cumple cada 3 posiciones, es decir cada suma.
- Cada 30 posiciones se repite el ciclo "1, 31, 61, 91, 121 etc."

Figura 7. Tratamientos de la representación simbólica de la secuencia inicial, formulación de conjeturas a partir de estos

Nota. E: "Como les dije, el resultado son, digamos que, múltiplos de tres a excepción de los valores... a excepción de cada tres posiciones en, digamos que, la secuencia donde hay que sumarle un valor para que este sea múltiplo de tres".

Fuente: elaboración propia.

Análisis sobre el URRS: en el proceso de resolución, se identifica el uso de los registros figural, lenguaje natural y simbólico. Describen, en lenguaje natural, la forma en la que se construye la secuencia a partir de "un patrón de puntos" (figura 5), sin evidenciar un tratamiento (Duval, 2004) explícito. También hay uso del registro del discurso (Duval, 2006). Los estudiantes verbalizan las propiedades que encuentran en la secuencia, apoyándose en la representación numérica de los términos (figura 6) y de las normas sintácticas de este registro.

Se usa en mayor medida el lenguaje natural para formular una relación que encuentran en la secuencia a partir de los tratamientos realizados de la representación simbólica (figura 7). Se puede hablar de un proceso de refinamiento de las representaciones, en cuanto al estar en un registro semiótico más potente que el figural —el simbólico—, se requiere del dominio de normas sintácticas más sofisticadas, de tal manera que logran obtener ganancias de estas, particularmente conjeturas sobre los números triangulares.

Análisis sobre los elementos del proceso de institucionalización: se evidencia un esfuerzo de parte de los estudiantes por mostrar y explicar de la manera más clara posible su resolución y, en consecuencia, hacen uso de diversas representaciones en al menos tres registros semióticos (Duval, 2004). Por su parte, los criterios de validez (Margolinas, 2009) sobre las características que abstraen, se sustentan en el desarrollo de procesos que involucran conocimientos matemáticos —uso de propiedades, definición de múltiplo—.

Adicionalmente, se identifica una fase de balance en la que los estudiantes son capaces de formular sus ideas en aras de mostrar los avances del problema. El saber matemático involucrado surge en su resolución para representar de otra forma la secuencia inicial. Son los estudiantes en un proceso de devolución

(Santos, 2016) quienes, en la necesidad de abordar el problema propuesto, se aproximan a dicho saber.

Conclusiones

Como el anterior, se analizó el proceso de resolución de tres grupos de estudiantes, en el que dos de ellos decidieron integrarse en uno solo a partir de la tercera sesión, su desarrollo se muestra en el análisis anterior. De esta manera, se identifican algunos elementos en común que permiten establecer resultados en términos de cada uno de los objetivos y conclusiones generales en la investigación, en los que se profundiza a continuación.

El URRS está caracterizado por la transición entre diversos registros semióticos, manifestándose inicialmente por medio del registro figural y apoyado fuertemente en el lenguaje natural. A medida que el docente iba desarrollando acciones que involucran a los estudiantes en los aspectos principales del proceso de institucionalización (Margolinas, 2009), van siendo evidentes las transformaciones semióticas, que llevan a la mayoría de los grupos a utilizar normas sintácticas más sofisticadas, propias del registro simbólico, con lo cual generan un primer refinamiento de las representaciones y una primera aproximación de los conocimientos.

Luego de la variación del problema, los estudiantes continúan su proceso de resolución, teniendo como objetivo el establecimiento de conjeturas sobre propiedades y características del conjunto numérico que ha sido abstraído por ellos. En este proceso se ponen de manifiesto transformaciones de la representación simbólica-aritmética de la sucesión de triangulares que les permite, efectivamente, formular conjeturas y generar cri-

terios de validez de estas. Recordando que la validez de las conjeturas se da por medio de ejemplos concretos.

En la diversidad de representaciones usadas, los estudiantes identifican los números triangulares con los conocimientos construidos y aunque no se reconocen aún como el saber matemático involucrado, este emerge como resultado de los acuerdos colectivos dados en las puestas en común.

En cuanto a las potencialidades, este estudio permitió observar cómo la institucionalización, lejos de ser una fase terminal de la RP, conlleva usar diversos objetos primarios (Rojas, 2012) manifestados a partir de representaciones semióticas, cuyo refinamiento y trabajo matemático —como el desarrollado en la formulación de conjeturas de números triangulares— permiten que sean los estudiantes quienes se aproximen al saber matemático involucrado, sin necesidad de que el docente exponga dicho saber.

El refinamiento progresivo de RS es paralelo al abandono del medio exterior para establecer criterios de validez, por lo que podría pensarse que los estudiantes atraviesan por distintas etapas o niveles del URRS, sujetos a la configuración cognitiva (Rojas, 2012) y a los aspectos principales del proceso de institucionalización (Margolinas, 2009).

En cuanto a las limitaciones del trabajo, debe entenderse que el estudio fue realizado con un grupo particular de estudiantes, en sesiones de clase remotas y mediadas por las TIC, lo que lleva a ciertas formas de interacción entre estudiantes y profesor distintas, esto limitó el relacionamiento entre estudiantes propio de la presencialidad

Referencias

- Alcalá, M. (2002). *Construcción del lenguaje matemático*. Graó.
- Berciano A., Jiménez C., Salgado, M. (6-9 de septiembre de 2017). *Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso*. [Resumen de presentación de la conferencia]. XXI Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática - SEIEM. Zaragoza, España.
- Bohórquez, L. (2020). *Concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y sus cambios en estudiantes para profesor en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Bolaños, J. (2015). *Uso de representaciones semióticas en el aprendizaje de las operaciones de suma y resta de números enteros en una aula con integración de población ciega*. [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional de la Universidad Distrital. <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2407>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Libros del Zorzal. <https://bit.ly/40vAG79>
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME* 9(1), 143–168.
- Elliot, J. (2000). *La investigación-acción en educación*. Morata. <http://www.terras.edu.ar/biblioteca/37/37ELLIOT-Jhon-Cap-1-y-5.pdf>
- Fonseca, L. y Alfaro, C. (2010). La resolución de problemas como estrategia metodológica en la formación de docentes de matemáticas: una propuesta. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 5(6), 175-191.
- García, C. (2014). *Lenguaje y comunicación en matemáticas una aproximación teórica desde las matemáticas a los conceptos de lenguaje y comunicación en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21651>
- Garzón, M. (2015). *Desarrollo y comprensión de la semiótica matemática a partir de la semiótica lingüística y el lenguaje común*. [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional de la Universidad Distrital. <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2090>

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D. (20-22 de septiembre de 2012). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática*. [Resumen de presentación de la conferencia]. XVI Simposio SIEM. Baeza, España.
- Jiménez, A. y Pineda, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia*, (16), 101-116.
- Leal, J. y Arenas, C. (2018). *Resignificación del concepto de integral en un ambiente de resolución de problemas para la formación de profesores de matemáticas*. [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <http://hdl.handle.net/11349/12896>
- Licenciatura en Matemáticas. (2017). *Proyecto Educativo del Programa Proyecto Curricular: Licenciatura en Matemáticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Margolinas, C. (2009). *De la importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Universidad Industrial de Santander.
- Maquillón, W. (2016). *Resolución y planteamiento de problemas matemáticos apoyados por las TIC*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59015>
- Mejía, G. (2018). Las funciones semióticas como herramienta de análisis en la comprensión de objetos matemáticos. Una situación de probabilidad simple. *Revista Números* 99, 127-140. <http://funes.uniandes.edu.co/12903/1/Mejia2018Las.pdf>
- Munarriz, B. (1992). Técnicas y métodos en investigación cualitativa. En: J. M. Muñoz Cantero y E. Abalde Paz (Coords.), *Metodología educativa I* (pp. 101-116). Universidade da Coruña, Servizo de Publicacións. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1217001>
- Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula universitaria*, 1(13), 29-36.
- Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En: M. Panizza (Coord.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB* (pp. 59-71). Paidós.
- Puga, L., Rodríguez, J. y Toledo, A. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, colección de Filosofía de la Educación*, 20(1), 195-218.
- Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* [Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional de la Universidad Distrital. <https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/16315/RojasGarronPedro-Javier2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Rojas, P. (2014a). Conflictos semióticos en un contexto algebraico: un análisis de las producciones de los estudiantes. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 11(1), 1-9.
- Rojas, P. (1 de mayo de 2014b). Problemas y ambiente de resolución de problemas. *Revista Ruta Maestra*. <https://rutamaestra.santillana.com.co/problemas-y-ambiente-de-resolucion-de-problemas/>

- Santos, J. (2016). *Una implementación para la construcción del objeto geométrico parábola, a partir del trabajo con el software de geometría dinámica carmetal*. [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional de la Universidad Distrital. <https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/3155/SantosTorreresJuli%C3%A1nHumberto2016.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Suárez, N., Galindo, S. y Jiménez, A. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1(2), 173-202.
- Vasilachis, I. (2009). Los fundamentos ontológicos y epistemológicos de la investigación cualitativa. *Fórum: qualitative social research sozialforschung*, 10(2), 1-36.

Forma de citar este artículo

Ayala, B. (2023). Uso y refinamiento de representaciones semióticas de estudiantes de licenciatura: un análisis sobre el proceso de institucionalización. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (54), 211-230. <https://doi.org/10.17227/ted.num54-17098>