



Título: Movimientos de la Luna
Autores: Camilo Gaitán Quintero
y Federico Gaitán Quintero
Año: 2021
Técnica: Acero de cold rolled

Álgebra y argumentación: desafíos para la investigación en educación matemática*

Algebra and Argumentation: Challenges for
Research in Mathematics Education
Álgebra e argumentação: desafios para a
pesquisa em educação matemática

Luis Omar Cortés-Tunjano** 
Jorge Andrés Toro-Uribe*** 

Para citar este artículo

Cortés-Tunjano, L. O. y Toro-Uribe, J. A. (2024). Álgebra y argumentación: desafíos para la investigación en educación matemática, *Pedagogía y Saberes*, (60), 192–206. <https://doi.org/10.17227/pys.num60-18627>

* Artículo resultado de una revisión documental, la cual se enmarca en el trabajo doctoral “Uso de la argumentación en la solución de tareas algebraicas como contribución al desarrollo del razonamiento algebraico”, enmarcado en el Doctorado en Didáctica de la Universidad Tecnológica de Pereira.

** Candidato a Doctor en Didáctica, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. Profesor de una institución de educación pública del departamento de Cundinamarca. omarcortes78@gmail.com

*** Doctor en Educación, profesor e investigador en la Universidad de Antioquia. jandres.toro@udea.edu.co.

Resumen

Este artículo forma parte de un estudio más amplio cuyo objetivo es identificar tendencias y desafíos del álgebra escolar y su relación con procesos de argumentación en el campo de investigación en Educación Matemática. La revisión se llevó a cabo en tres etapas: primero, se realizó una búsqueda de información en bases de datos en el periodo de 2010 a 2021; segundo, se clasificó y organizó la información aplicando criterios de inclusión y exclusión; y tercero, se elaboró la revisión agrupando los documentos en cinco categorías: la caracterización de la naturaleza del razonamiento algebraico, las relaciones entre la argumentación y el razonamiento algebraico, las dificultades de los estudiantes con el lenguaje matemático para el tratamiento de expresiones algebraicas, las representaciones auxiliares para el desarrollo del razonamiento algebraico y la caracterización del razonamiento algebraico. A partir de esta revisión, se establecen algunas tendencias, como la persistente dicotomía entre el paso de la aritmética al álgebra, la zona de emergencia del álgebra y los conocimientos pedagógicos de los profesores de matemáticas. Además, se identifican ciertos desafíos, como la necesidad de llevar a cabo investigaciones orientadas al fortalecimiento de procesos en los estudiantes, como la comunicación, el razonamiento y la argumentación.

Palabras clave

argumentación; razonamiento; rol del profesor; aprendizaje; enseñanza secundaria

Abstract

This article is part of a larger study and aims to identify trends and challenges in school algebra and its relationship with argumentation processes in the field of research in Mathematics Education. The review was carried out in three moments: first, the information was searched in databases from 2010 to 2021; second, the information was classified and organized by applying inclusion and exclusion criteria; and third, the review was prepared by grouping the documents into five categories: characterization of the nature of algebraic reasoning, the relationships between argumentation and algebraic reasoning, the difficulties of students with mathematical language for the treatment of algebraic expressions, the representation aids for the development of algebraic reasoning, and the characterization of algebraic reasoning. From this review, some trends were established, such as the persistent dichotomy between the transition from arithmetic to algebra, the emergency zone of algebra, and the pedagogical knowledge of mathematics teachers. Additionally, certain challenges were identified, such as the need to propose research aimed at strengthening processes in students, such as communication, reasoning, and argumentation.

Keywords

argumentation; reasoning; role of the teacher; learning; secondary education

Resumo

Este artigo faz parte de um estudo mais amplo e tem como objetivo identificar tendências e desafios da álgebra escolar e sua relação com os processos de argumentação no campo da pesquisa em Educação Matemática. A revisão foi realizada em três momentos. Primeiro, as informações foram buscadas em bases de dados durante o período de 2010 a 2021. Em segundo lugar, as informações foram classificadas e organizadas aplicando critérios de inclusão e exclusão. Por último, a revisão foi preparada, agrupando os documentos em cinco categorias: a caracterização da natureza do raciocínio algébrico, as relações entre argumentação e raciocínio algébrico, as dificuldades dos alunos com a linguagem matemática para o tratamento de expressões algébricas, as representações auxiliares para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e a caracterização do raciocínio algébrico. A partir desta revisão, estabelecem-se algumas tendências, como a persistente dicotomia entre a passagem da aritmética para o álgebra, a zona de emergência da álgebra ou o saber pedagógico dos professores de matemática; além de alguns desafios, como a necessidade de propor pesquisas voltadas para o fortalecimento de processos nos alunos, como comunicação, raciocínio e argumentação.

Palavras-chave

argumentação; raciocínio; papel do professor; aprendizagem; ensino médio

Introducción

Esta revisión documental tiene como objetivo identificar las tendencias y desafíos en cuanto al álgebra escolar del periodo 2010 a 2021, y su relación con los procesos de argumentación en el campo de investigación en Educación Matemática. Se reconoce que, con el paso del tiempo, las investigaciones en este campo se han interesado por determinar las dificultades presentadas por los profesores para desarrollar las competencias matemáticas y por indagar las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de carácter algebraico (*e.g.*, Godino *et al.*, 2015; Radford, 2014; Castro *et al.*, 2017). Un ejemplo de ello son los niveles de algebraización de las prácticas matemáticas de Godino *et al.* (2015), quienes reflexionan sobre la importancia de las representaciones estereotipadas sobre los estudiantes y las particularidades de la formación inicial y continua de los profesores que les posibiliten caracterizar a los estudiantes de acuerdo con su identidad para aprender matemáticas. En este sentido, valdría la pena reflexionar sobre las tareas que los profesores preparan y ejecutan en la clase de matemáticas para desarrollar el razonamiento algebraico en los estudiantes.

De acuerdo con Galeano *et al.* (2015), la revisión documental es una metodología que permite recuperar investigaciones para describirlas o, en algunos casos, para trascender de manera reflexiva sobre ciertas categorías. En particular, en este artículo se retoman investigaciones asociadas al álgebra escolar y las representaciones auxiliares para el desarrollo del razonamiento algebraico. Se organiza la información para reconocer la naturaleza del álgebra desde diversas perspectivas, las metodologías implementadas para su desarrollo, y las limitaciones y retos de las investigaciones. Se consideraron tesis doctorales, artículos de investigación, capítulos de libros y libros. Para la búsqueda de la información,

se realizó un rastreo en las bases de datos de *Scopus* y *SpringerLink*. Se seleccionaron los documentos que, en el título, el resumen o en las palabras clave, hicieran alusión a los términos argumentación en clase de matemáticas, álgebra escolar y razonamiento algebraico.

De acuerdo con esta consideración, se encontraron 670 documentos, de los cuales se analizaron 50. Los documentos fueron seleccionados siguiendo ciertos criterios de inclusión: 1) estudios sobre razonamiento algebraico publicados entre 2010 y 2021; 2) investigaciones realizadas en educación inicial, educación secundaria o en formación de profesores; y 3) documentos escritos en español o inglés. Como criterios de exclusión se consideraron: 1) trabajos escritos en otros idiomas que no cumplieran con los criterios de inclusión; y 2) estudios aplicados en el campo de las matemáticas puras o en otras ciencias.

Para el análisis de los documentos, se utilizó una matriz bibliográfica en Microsoft Excel. En ella, se organizaron los textos de acuerdo con el tipo de documento, el título, el año de publicación y un análisis. Luego, se identificaron puntos en común, lo cual permitió clasificar los documentos en cinco categorías: en la primera, aquellos documentos cuyo énfasis estaba en la caracterización de la naturaleza del razonamiento algebraico; en la segunda, documentos que presentaban relaciones entre la argumentación y el razonamiento algebraico; en la tercera, documentos cuyo énfasis estaba en las dificultades de los estudiantes con el lenguaje matemático para el tratamiento de expresiones algebraicas; en la cuarta, documentos que abordaban las representaciones auxiliares para el desarrollo del razonamiento algebraico; y en la quinta, documentos sobre la caracterización del razonamiento algebraico y la zona de emergencia del pensamiento algebraico. En la Tabla 1 se muestran los documentos clasificados según cada categoría.

Tabla 1. Clasificación de los documentos según cada categoría

Categoría	Documentos
Caracterización de la naturaleza del razonamiento algebraico	Godino <i>et al.</i> (2014); Kohanová (2019); Zapata (2019); Ellis (2020); Mariño (2020); Mariño <i>et al.</i> (2021); Penagos (2021); Torres <i>et al.</i> (2021).
Relaciones entre la argumentación y el razonamiento algebraico	Posada (2010); Hunter (2014); Vergel (2014); Goizueta (2015); Durango (2017); Mata y Da Ponte (2019); Molina (2019); Develaki (2020); Echeverry (2020); Toro (2020); Eriksson y Sumpter (2021); Bautista <i>et al.</i> (2021); Fu <i>et al.</i> (2022).
Dificultades de los estudiantes con el lenguaje matemático para el tratamiento de expresiones algebraicas	Rojas (2012); Flores y Azumendi (2016); Quintero (2018); Kop <i>et al.</i> (2019).
Representaciones auxiliares para el desarrollo del razonamiento algebraico	Bjuland (2012); Hunter <i>et al.</i> (2018); Nilsson y Eckert (2019); Kilhamn y Bråting (2019); Otten <i>et al.</i> (2019); Medová <i>et al.</i> (2020); Valoyes y Zapata (2021); Hunter y Miller (2022); Soneira (2022)
Caracterización del razonamiento algebraico y la zona de emergencia del razonamiento algebraico	Socas (2011); Aké (2013); Chrysostomou <i>et al.</i> (2013); Lee y Hackenberg (2014); Godino <i>et al.</i> (2015); Hackenberg y Lee (2016); Castro <i>et al.</i> (2017); Vergel y Roja (2018); Gaita y Wilhelm (2019); Hewitt (2019); Opsal (2019); Rodrigues y Serrazina (2019); Burgos (2020); Chimoni <i>et al.</i> (2019); Hackenberg <i>et al.</i> (2021); Zapatera y Quevedo (2021).

Fuente: elaboración propia.

Resultados

En este apartado se describen las categorías derivadas del análisis realizado. Se presenta inicialmente una descripción de cada categoría y luego una tabla en donde se muestran las tendencias y desafíos identificados en cada categoría.

Caracterización de la naturaleza del razonamiento algebraico

Esta categoría se caracteriza por abordar la naturaleza del álgebra desde la perspectiva del razonamiento y del pensamiento (Iordenau *et al.*, 2019), principalmente en la conceptualización de la noción de variación (Ellis *et al.*, 2020), los procesos de generalización (Godino *et al.*, 2014), la demostración matemática (Fu *et al.*, 2022) y la solución de problemas (Medová *et al.*, 2020). Los documentos reseñados analizan estas características desde los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. La mayoría de estas investigaciones son de ámbito internacional, procedentes del continente europeo y tienen autores como Torres *et al.* (2021), Kohanová y Solstad (2019), Godino *et al.* (2014) y Ellis *et al.* (2020). En Colombia, se han realizado investigaciones con autores como Penagos (2021), Zapata (2019) y Mariño *et al.* (2021).

Frente a la naturaleza del álgebra, algunos estudios abordan las propiedades implícitas en esta área, como la comprensión de símbolos (Hackenberg y Lee, 2016), la generalización aritmética (Godino y Font, 2003), la operacionalización de las estructuras algebraicas a través de operaciones matemáticas (Torres y Cañadas, 2021) y la relación entre demostración, justificación y prueba en el razonamiento algebraico (Penagos, 2021).

Esta caracterización se ha realizado desde diversos contextos y perspectivas, como en la investigación de Mariño (2020), quien menciona la gran pluralidad y desacuerdos en la comunidad académica frente al pensamiento variacional y su naturaleza. Además, presenta crítica a la mirada focalizada del investigador y no desde el pensamiento de los estudiantes, quienes son los principales actores en su proceso de formación académica. También conceptualiza el pensamiento variacional como las interacciones entre los procesos que ocurren mediante las acciones de los estudiantes al resolver problemas y las formas de comprender dichos procesos para trascender a nuevas formas de pensar sobre ellos.

Cuando se hace referencia al álgebra escolar, son varios los conceptos relacionados con este tipo de pensamiento, entre ellos, el de variable o símbolo, el de estructura y generalización. Estas nociones son el foco

de atención de las tendencias investigativas debido a las dificultades presentadas tanto por los profesores como por los estudiantes (Castro *et al.*, 2017). En este sentido, Penagos (2021) afirma que al desarrollar el razonamiento algebraico, se tiene la capacidad de manipular analíticamente las variables, lo cual es una actividad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y, como consecuencia, del álgebra escolar. Además, resalta la importancia de proponer tareas que favorezcan el avance cognitivo de los estudiantes, guiándolos hacia diversas formas de pensar y entender los procesos algebraicos al resolver problemas. De este modo, se convierten en sujetos propositivos de nuevos problemas, con la habilidad de refutar, justificar y explicar conscientemente los procesos realizados.

A su vez, en investigaciones como la de Torres *et al.* (2019) y Godino y Font (2003), se resalta la importancia del razonamiento algebraico y se ubica en el centro de las matemáticas, ya que su desarrollo progresa paralelamente con habilidades como generalizar, usar adecuadamente el lenguaje simbólico y operar con estructuras funcionales o ecuaciones y sus variables mediante reglas sintácticas que permiten transformar estas expresiones. Esto implica formalizar y generalizar como eje central de este tipo de razonamiento. En estas investigaciones se propone la modelación algebraica como instrumento para simplificar las técnicas de solución de problemas por parte de los estudiantes y, de esta manera, ayudarlos a progresar en los niveles de algebraización.

Otras investigaciones se centran en la caracterización del razonamiento algebraico a partir del análisis realizado a los profesores (Zapatera y Quevedo, 2021). Por ejemplo, Zapata (2019) se enfoca en las transformaciones conceptuales de los profesores de primaria que promueven intervenciones de carácter algebraico en los primeros niveles de escolaridad. Uno de sus hallazgos apunta a que los profesores califican el álgebra dentro de componentes analíticos como la indeterminación, la justificación de enunciados verdaderos y la designación simbólica, debido a la conjugación entre el campo de las estructuras algebraicas y las operaciones no convencionales. Concluyen que investigar en las primeras etapas del aprendizaje puede facilitar nuevas formas de pensamiento algebraico. De la misma manera, Kohanová y Solstad (2019) llevaron a cabo una investigación a partir de un curso de generalización con profesores de educación primaria, con la intención de demostrar la estrecha relación entre los procesos de generalización y los de justificación y demostración. En este estudio se evidenciaron las dificultades de los profesores con el lenguaje simbólico, convencional y general para expresar las ideas matemáticas.

Por un lado, se han realizado estudios acerca de los procesos de generalización en estudiantes, como el realizado por Torres y Cañadas (2021), en el cual se describen los procesos de estudiantes de segundo grado a través de una tarea de generalización utilizando funciones como $y = x + 3$. Los resultados revelan la relación entre la abducción, la deducción y la generalización, lo cual aporta una perspectiva teórica para caracterizar el proceso de generalización a partir del tratamiento de las estructuras algebraicas. Además, esto resulta fundamental para describir los procesos de pensamiento relacionados con el álgebra escolar. Por otro lado, Godino *et al.* (2014) señalan dos características esenciales del álgebra: el uso de símbolos y las relaciones entre objetos, como fórmulas, funciones y expresiones, que se transforman mediante la aplicación de reglas sintácticas.

Finalmente, Ellis *et al.* (2020) proponen una caracterización del razonamiento algebraico basada en los conceptos de variación y covariación, considerando el razonamiento suave y continuo como eje fundamental para comprender las matemáticas del cambio. Sugieren que el desarrollo de la idea de función y tasa, junto con la covariación continua de escala, proporciona una forma complementaria de razonamiento que puede fomentar comprensiones productivas y plausibles para apoyar el pensamiento algebraico de los estudiantes. Concluyen que es necesario comprender mejor la naturaleza del álgebra a través de nuevas investigaciones en este campo.

De acuerdo con los documentos de esta categoría, se logra identificar ciertos retos en cuanto a la caracterización del álgebra escolar, considerando la inexistencia de un acuerdo común entre la comunidad académica en este aspecto. Se podría profundizar, además, en los rasgos algebraicos surgidos dentro de la zona de emergencia del razonamiento algebraico para reflexionar sobre otras maneras de enseñar esta rama de las matemáticas, reconociendo la importancia del papel de los niveles de algebraización y la relación entre los diferentes tipos de razonamiento con el propósito de algebraizar el currículo.

Argumentación en educación matemática y razonamiento algebraico

Esta categoría se caracteriza por investigaciones interesadas en la argumentación en las clases de matemáticas en relación con el desarrollo del razonamiento. Algunos de los trabajos reseñados resaltan el modelo de Toulmin (2003) como pauta para examinar los argumentos de profesores y estudiantes (Toro y Castro, 2020). Otros documentos muestran

cómo la discusión de tareas en las clases se convierte en un entorno propicio para desarrollar la argumentación y el razonamiento. En esta categoría, se destacan en el ámbito nacional las investigaciones de Durango (2017), Posada (2010), Toro (2020) y Vergel (2014); mientras que en la esfera internacional se distinguen los trabajos de Fu *et al.* (2022), Bautista *et al.* (2021), Pereira y Da Ponte (2019), Eriksson y Sumpter (2021) y Hunter (2014).

Los estudios internacionales evidencian un interés en las acciones pedagógicas de los profesores para llevar a cabo prácticas, tareas y estrategias que permitan a los estudiantes una mayor participación a través de sus discursos, comunicaciones y razonamientos, especialmente en el ámbito del álgebra (Hunter *et al.*, 2018). Estos procesos son examinados en investigaciones como la de Hunter (2014), quien problematiza las posibles acciones pedagógicas para ayudar a los estudiantes a involucrarse en el desarrollo del razonamiento algebraico temprano y menciona el uso de la argumentación como eje fundamental para este fin. Se invita a la comunidad académica a proponer tareas que apunten al desarrollo de generalizaciones.

En concordancia con lo anterior, se destaca la relevancia del diseño de tareas que permitan la interacción de varias áreas para fomentar el razonamiento matemático en los estudiantes. Por ejemplo, en los aportes de Erickson y Sumpter (2021), se analiza la naturaleza de los argumentos (predictivos, de verificación y evaluativos) y las estrategias implementadas durante la ejecución de tareas que articulan las fracciones con el álgebra.

En la misma línea de las acciones pedagógicas de los profesores de matemáticas enfocadas en el diseño de tareas, se encuentran investigaciones similares centradas en las interacciones entre los subprocesos del razonamiento algebraico y la argumentación. Desde la perspectiva de Pereira y Da Ponte (2019), el diseño de tareas enfocadas a la generalización conduce a la generalización *abductiva* de los estudiantes. Además, cuestiona las prácticas de aula centradas en el desarrollo de estas tareas a través de la *deducción* y deja como desafío la elaboración de estrategias que articulen ambos tipos de generalización. En este sentido, se puede afirmar que el proceso clave dentro del razonamiento algebraico es la capacidad de formular preguntas, resolver estrategias, formular, probar, generalizar y justificar conjeturas. Esto se relaciona con los procesos de la argumentación (Goizueta, 2015; Radford, 2014; Kohanová y Solstad, 2019).

Dentro de la planeación de los profesores de matemáticas en sus clases, existen recursos y materiales de apoyo. Por ejemplo, uno de los elementos más

utilizados son los libros de texto por su variedad de problemas, ejercicios y ejemplos (Castro *et al.*, 2017). Sin embargo, existen discusiones sobre su relevancia en la enseñanza actual. Algunos autores (Palacios y García, 2018) consideran los libros de texto como oportunidades para que los estudiantes aprendan sobre razonamiento y prueba en el contexto del álgebra escolar. No obstante, la investigación de Fu *et al.* (2022) concluye que los libros de texto en China promueven habilidades procedimentales y repetitivas. Es decir, las tareas propuestas en estas herramientas generalmente no se enfocan en el desarrollo de razonamientos y argumentos.

En el contexto nacional, diversos estudios muestran un panorama similar en cuanto a la importancia de reconocer los recursos semióticos de los estudiantes, sus avances en el uso del lenguaje y el simbolismo al aprender álgebra. Es necesario caracterizar la naturaleza de la argumentación en las clases de matemáticas. Bautista *et al.* (2021) afirman que es posible establecer vínculos entre el razonamiento aritmético y el razonamiento algebraico de los estudiantes, a través de diversas representaciones sin recurrir al simbolismo. Asimismo, se pueden establecer conexiones entre los procesos argumentativos y algebraicos mediante la implementación de tareas que fomenten la interacción discursiva de los estudiantes para defender o refutar ideas. Adicionalmente, la investigación de Vergel (2014) destaca la importancia de reconocer las explicaciones, argumentos y formas de pensar de los estudiantes al expresar generalizaciones de patrones. Además, se resalta la analiticidad del razonamiento algebraico y se lo caracteriza desde su naturaleza de indeterminación como pensamiento algebraico factual y pensamiento algebraico contextual.

Dentro de los trabajos centrados en los vínculos entre la argumentación y el razonamiento, sobresalen los análisis de Posada (2010), Goizueta (2015) y Develaki (2020), quienes reconocen que el nexo se manifiesta en la manera en que conceptualizamos y validamos afirmaciones. La argumentación abarca el proceso complejo de formular aseveraciones, someterlas a escrutinio, respaldarlas con justificaciones, cuestionar esas justificaciones y rebatir críticas, mientras que el razonamiento se enfoca en la actividad central de presentar razones para sustentar una aseveración y evaluar cómo esas razones la fortalecen.

En este mismo sentido, Toro (2020) focalizó su investigación en la comprensión de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase. Desde este punto de vista, se

reconocen tres características de la argumentación correspondientes a las dimensiones comunicativa, interaccional y epistémica. En la primera, se identifican las afirmaciones, cuestionamientos, expresiones y gestos del profesor. En la segunda, se distinguen las normas de clase, la discusión y el convencimiento como rasgos durante la interacción entre profesores y estudiantes. Y en la tercera, se destacan cualidades como la capacidad de manipular objetos matemáticos, tratar los errores procedimentales, la justificación y la refutación. Del mismo modo, Echeverry (2020) propone situaciones que generen incertidumbre mediante el diseño de tareas en geometría 3D para promover el conocimiento de futuros profesores de matemáticas a través de la movilización de sus procesos argumentativos.

Desde otra perspectiva, se resaltan las investigaciones que implementan el modelo de Toulmin. En el trabajo de Durango (2017), se caracteriza la argumentación de profesores en formación, la cual se centra en la lógica formal mediante ciertos elementos argumentativos, tales como datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores (p. 182). Este es un estudio de caso en el que se analizaron los argumentos mediante preguntas y respuestas, cuyo objetivo era justificar, defender y refutar para convencer a un auditorio sobre puntos de vista o conocimientos de geometría. De manera similar, Molina (2019) establece un conjunto de normas vinculando el Enfoque Ontosemiótico y el modelo de Toulmin como herramienta para estructurar los procesos argumentativos.

Como conclusión a esta línea, se reconocen ciertas tendencias. En primer lugar, se ha observado una tendencia a investigar la argumentación de los profesores en formación con el propósito de mejorar, en el futuro, los argumentos de sus estudiantes (Echeverry, 2020). Un profesor capaz de dominar esta habilidad, seguramente planeará, diseñará y ejecutará tareas para motivar la argumentación de sus estudiantes (Molina, 2019). Por esta razón, uno de los desafíos se centra en la elaboración de estrategias destinadas a facilitar el desarrollo de la competencia matemática de argumentación dentro del álgebra escolar. En segundo lugar, se ha notado una relación entre la argumentación y el razonamiento algebraico en procesos como justificar, refutar, generalizar y operar estas generalizaciones (Goizueta, 2015). Además, se ha observado que el discurso, los gestos, el uso del lenguaje y el manejo de los símbolos emergentes en el aula de clase durante la interacción entre profesores y estudiantes (Toro, 2020) también tienen un papel importante en la argumentación. Finalmente, se reconoce la necesidad de investigar más a fondo la

relación entre argumentación y razonamiento algebraico, ya que no se ha encontrado ningún estudio explícito que los vincule directamente.

Dificultades de los estudiantes con el lenguaje matemático para el tratamiento de expresiones algebraicas

La mayoría de las investigaciones en esta categoría se relacionan con los trabajos de los apartados anteriores, ya que se centran en las dificultades que tanto profesores como estudiantes enfrentan en los subprocesos del razonamiento algebraico. Estos estudios se enfocan en las contrariedades evidenciadas en las actitudes hacia las matemáticas (Flores y Azumendi, 2016), como la motivación, la ansiedad y la confianza, las cuales afectan el desarrollo cognitivo de los estudiantes y provocan falta de comprensión en los estadios semióticos, estructurales y autónomos. Además, estas dificultades en álgebra pueden derivar de la aritmética, errores en los procedimientos, la naturaleza del lenguaje algebraico y las dificultades en la generalización por parte de los estudiantes.

Con relación al sentido en los *estadios semióticos*, referidos a los niveles de desarrollo cognitivo a los que los estudiantes pueden llegar en su capacidad para dar sentido a las fórmulas algebraicas a través del uso de signos nuevos y significados de signos ya conocidos (Socas, 2011), el trabajo de Kop *et al.* (2019) se propuso mejorar la capacidad de lectura de las fórmulas algebraicas. Es decir, identificar su estructura y el vínculo con su representación gráfica mediante el reconocimiento y el razonamiento cualitativo. En su investigación, mostraron que las representaciones gráficas de una función pueden influir en el desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes. En esta misma dirección, Rojas (2012), Bjuland (2012) y Soneira (2022) focalizan sus investigaciones en las dificultades con los recursos semióticos y categorizan estos obstáculos en cuatro grupos: el reconocimiento simbólico de las expresiones, el estancamiento en situaciones dadas, cambios en las comprensiones de los contenidos algebraicos y los impedimentos con el lenguaje matemático, especialmente en los procesos de generalización.

Otro tipo de dificultades presentadas en el aprendizaje del álgebra son aquellas relacionadas con los procesos de operatividad y las propiedades de los conjuntos numéricos, las cuales dotan de sentido a los conceptos algebraicos. En trabajos como el de Quintero (2018), se propusieron ciertas *Actividades Orientadoras de Enseñanza* con respecto a los conceptos de función y límite, reconociendo dificultades

en torno a la falta de apropiación de estas nociones y, como consecuencia, obstáculos para comprenderlas y aplicarlas correctamente en diversas situaciones. Estas Actividades Orientadoras de Enseñanza pueden ser vistas como análogas a las tareas diseñadas para el aprendizaje y desarrollo del razonamiento algebraico relacionado.

En esta categoría, el desafío está en el diseño y aplicación de intervenciones que no se centren únicamente en los procesos de generalización. Las dificultades en el aprendizaje del álgebra abarcan otras dimensiones relacionadas con los niveles de razonamiento algebraico en educación secundaria, como el uso y tratamiento de parámetros para el estudio de estructuras algebraicas.

Representaciones auxiliares para el desarrollo del razonamiento algebraico

Teniendo en cuenta la necesidad de reflexionar sobre la didáctica del álgebra escolar, en esta tendencia se analizan las propuestas didácticas de investigaciones en las cuales se implementan estrategias basadas en la modelación, la resolución de problemas abiertos, actividades de generalización, el diseño de tareas, entre otros. En la investigación de Otten *et al.* (2019), se realiza una intervención en educación primaria basada en un modelo de equilibrio para solucionar ecuaciones lineales y se compara el efecto de un móvil colgante estático en papel y un móvil colgante físico manipulable. Los resultados concluyen que ambos modelos influyen positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, pero es más relevante el modelo que utiliza material concreto.

Del mismo modo, en Hunter y Miller (2022) y Medová *et al.* (2020), se relaciona la enseñanza del álgebra con artefactos culturales y cotidianos. Estos autores investigaron el desarrollo de problemas matemáticos desde perspectivas cualitativas y cuantitativas, en el marco de tareas y subtareas con diferentes niveles de razonamiento combinatorio, de generalización algebraica y de razonamiento matemático general. Estos autores advierten que en las clases de matemáticas se deben utilizar con más frecuencia problemas abiertos enfocados en probar una desigualdad o imposibilidad en un entorno cotidiano. A través de estos problemas, los estudiantes tienen más éxito en el desarrollo de habilidades demostrativas, de razonamiento y de generalización. Además, sugieren investigar la manera en que estas destrezas se relacionan con otras competencias matemáticas.

En esta categoría, se destacan las estrategias pedagógicas utilizadas por los profesores de matemáticas para promover el desarrollo del razonamiento algebraico. Algunos investigadores, como Hunter *et al.* (2018), se han centrado en el desarrollo profesional y su importancia en el avance cognitivo de los estudiantes. En particular, se analiza la manera en que se identifican y emplean oportunidades para involucrar a los estudiantes en los procesos de justificación, generalización y prueba.

Asimismo, Valoyes y Zapata (2021) afirman que las dificultades con el aprendizaje del álgebra surgen debido a las características de la formación inicial y continuada de los profesores de matemáticas. En su mayoría, estos profesores no reflexionan sobre los mecanismos que permiten a los estudiantes comprender las nociones matemáticas, lo que resulta en la creación de identidades equivocadas y excluyentes de sus estudiantes. Esto se convierte en uno de los problemas dentro de la didáctica del álgebra. Como uno de los desafíos, señalan la necesidad de analizar la estructura que configura una buena práctica de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Desde otro ángulo, algunos documentos han mostrado la eficacia de intervenciones desde otros campos educativos. Tal es el caso de Kilhamn (2019), quien investiga la intersección entre el razonamiento algebraico y el computacional a través de la planeación y ejecución de una tarea que permita a los estudiantes usar diferentes símbolos para representar un mismo significado. Además, resalta la importancia de investigar sobre las estructuras de los algoritmos en educación infantil para lograr un mejor desarrollo del razonamiento algebraico, especialmente en el proceso de generalización. Un trabajo en esta misma dirección es el de Nilsson y Eckert (2019), quienes implementaron tareas basadas en la codificación de colores para apoyar procesos de flexibilidad en los estudiantes y así reconocer la relación entre una expresión algebraica y la estructura visual de patrones. Además, dejan abierta la necesidad de planificar secuencialmente el diseño de tareas que permitan el desarrollo de estos procesos en futuras investigaciones.

Los desafíos identificados en esta categoría giran en torno a la planeación, ejecución y reflexión de estrategias que permitan el progreso del razonamiento algebraico en los estudiantes de educación media. En este análisis documental, se identificó mayoritariamente como población a profesores en formación y se enfoca en la enseñanza del álgebra temprana en educación primaria. Es decir, no se incluyen estudiantes de los últimos años de escolaridad en esta tendencia.

Caracterización del razonamiento algebraico y la zona de emergencia del pensamiento algebraico

La mayoría de las investigaciones consultadas se concentran en esta tendencia debido a las tensiones que siempre han existido entre el paso de la aritmética al álgebra. Algunos reconocen esta controversia como una dicotomía (Gaita y Wilhelmi, 2019), mientras que otros la consideran una zona de emergencia durante el tránsito del razonamiento cuantitativo al algebraico (Hackenberg *et al.*, 2021). Asimismo, se han propuesto metodologías y enfoques para contribuir a la caracterización del álgebra escolar. Entre estos se encuentran los aportes de Godino *et al.* (2015), las tesis doctorales de Aké (2013) y Burgos (2020), que proponen los niveles de algebrización para caracterizar la práctica matemática; el libro de Vergel y Rojas (2018), en el cual se propone la tarea como un elemento artificial en la educación del estudiante, diseñado para observar ciertas características del desarrollo del pensamiento matemático; artículos derivados de congresos sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, como los de Lurdes (2019), Opsal (2019), Chimoni *et al.* (2019) y Hewitt (2019), que destacan la importancia de modelar situaciones y enfocarse en sus estructuras para desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de educación infantil; y artículos en revistas indexadas, como el de Lee y Hackenberg (2014), Castro *et al.* (2017), Zapatera y Quevedo (2021), Hackenberg y Lee (2016), Socas (2011) y Gaita y Wilhelmi (2019), que enfatizan en la importancia de investigar el tránsito de la aritmética al álgebra para lograr una interpretación adecuada y, así, alcanzar una comprensión estructural del álgebra.

Varias reflexiones planteadas en estos estudios exponen las formas en las que se desarrolla el razonamiento algebraico y el papel desempeñado en los niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares propuestos por Godino *et al.* (2015) y ampliadas por otros investigadores españoles. El objetivo de estos trabajos es permitir que los estudiantes progresen en los niveles de algebrización a través de la implementación de diversos modelos, instrumentos o metodologías. En esta perspectiva, se destaca el uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad relacionadas con la manipulación de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a reconocer las propiedades de las funciones y de los conjuntos numéricos, teniendo en cuenta los procesos de generalización matemática (Burgos, 2020; Rodrigues *et al.*, 2019; Hewitt, 2019).

De otra parte, se identificó el interés por estudiar las relaciones entre el razonamiento algebraico, el pensamiento fraccionario y el razonamiento recíproco en la escritura y manipulación de ecuaciones lineales. El principal instrumento utilizado en esta tendencia son las tareas algebraicas. Por ejemplo, Lee y Hackenberg (2014), Chimoni *et al.* (2019), Gaita y Wilhelmi (2019), Hackenberg y Lee (2016) y Hackenberg *et al.* (2021) investigan la necesidad de elaborar tareas y actividades que apoyen el uso de las operaciones y esquemas formados por los estudiantes al trabajar con ecuaciones lineales, números enteros y fracciones para dar significado a los símbolos literales. Sin embargo, Godino *et al.* (2015) y Chrysostomou (2013) aclaran el carácter algebraico asignado a estas tareas y sugieren que se debe atribuir a la actividad realizada por el individuo que resuelve un problema, no a las propias tareas, las cuales se pueden resolver de distintas maneras, pudiendo poner en juego una actividad algebraica diferente (p. 119). Es decir, aunque se planifiquen tareas aparentemente algebraicas, la solución por parte del estudiante podría ser de carácter aritmético dependiendo de sus estilos cognitivos. En esta misma dirección, Castro *et al.* (2017) utiliza los *niveles de algebrización*² para analizar el carácter algebraico de las tareas propuestas en cinco libros de matemáticas y propone tareas adecuadas a cada nivel.

En otros documentos se reportan investigaciones sobre la llamada *zona de emergencia del álgebra*,³ a través del análisis de los significados de los estudiantes en relación a las incógnitas, el símbolo igual y los conceptos multiplicativos. Se toman en consideración todos los subprocesos dentro del razonamiento algebraico. Al respecto, Socas (2011) cuestiona la postura que considera al álgebra como una generalización meramente aritmética. Según él, aprender álgebra implica un cambio de pensamiento informal a uno formal, y un tránsito de lo procedimental a lo estructural. Esto debe ser el foco de las investigaciones

- 2 De acuerdo con Castro *et al.* (2017), los niveles de algebrización para estudiantes de primaria son: Nivel 0: ausencia de razonamiento algebraico, se trabaja con objetos particulares y no se generaliza. Nivel 1: algebrización incipiente, se utilizan objetos intensivos y se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. Nivel 2: algebrización intermedia, se usan variables simbólicas para referir a los objetos intensivos y se resuelven ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$. Nivel 3: algebrización consolidada, se generan objetos intensivos simbólicos y se opera con ellos, se resuelven ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$ y se formulan reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.
- 3 Entendido por Radford (2010) como un espacio donde los estudiantes comienzan a transitar hacia el pensamiento algebraico, enfrentándose a desafíos cognitivos y epistémicos que pueden generar bloqueos y confusiones.

actuales. En consecuencia, una interpretación incorrecta de esta zona puede llevar al estancamiento de los estudiantes en el pensamiento aritmético, siendo este el principal desafío en esta tendencia (Radford, 2014).

Por último, algunos investigadores (Zapatera y Quevedo, 2021) proponen algebrizar el currículo desde el nivel de primaria hasta el de secundaria, ya que su introducción tardía puede tener un efecto negativo en el desempeño de los estudiantes, evidenciando una desconexión con las demás áreas de las matemáticas.

Podría afirmarse que hay varias investigaciones en educación inicial y formación de profesores relacionadas con la introducción de conceptos algebraicos desde edades tempranas. Sin embargo, preocupa la situación de aquellos estudiantes que se han quedado estancados en la zona de emergencia del álgebra. Por esta razón, es necesario investigar más sobre este tema y desarrollar intervenciones que ayuden a los estudiantes a superar esta dificultad.

Finalmente, se presentan en la tabla 2 las tendencias y desafíos identificados en las cinco categorías.

Tabla 2. *Tendencias y desafíos identificados en cada categoría*

Categoría	Tendencias	Desafíos
Caracterización de la naturaleza del razonamiento algebraico	Transformaciones conceptuales de profesores. Interacciones en la solución de problemas. Manipulación analítica de variables. Formalizaciones y generalizaciones. Generalizaciones a partir del tratamiento de estructuras algebraicas. Variación y covariación.	Unificar un acuerdo frente a la naturaleza del álgebra escolar.
Relaciones entre la argumentación y el razonamiento algebraico	Dificultades con el discurso y el razonamiento. Razonamiento algebraico temprano. Modelo de Toulmin. Discusión de tareas en las clases de matemáticas. Tareas específicamente diseñadas. Naturaleza de los argumentos. Resolver estrategias, formular, probar, generalizar y justificar conjeturas. Argumentación de docentes en formación.	Elaborar estrategias para el desarrollo de competencias. Investigar la relación entre argumentación y razonamiento algebraico.
Dificultades de los estudiantes con el lenguaje matemático para el tratamiento de expresiones algebraicas	Actitudes hacia las matemáticas. Errores procedimentales. Dificultades con los recursos semióticos. Estancamiento en los procesos de generalización aritmética. El sentido de los conceptos algebraicos.	Diseñar y aplicar intervenciones en educación secundaria. Usar parámetros para el estudio de las estructuras algebraicas.
Representaciones auxiliares para el desarrollo del razonamiento algebraico	Modelos basados en material concreto. Estrategias pedagógicas mediadas por la indagación. Entornos para fortalecer los procesos de justificación.	Usar problemas abiertos para la enseñanza del álgebra. Analizar la estructura de las prácticas de aula. Plantear secuencialmente el diseño de tareas.
Caracterización del razonamiento algebraico y la zona de emergencia del razonamiento algebraico	El papel de los niveles de algebrización. El estudio del concepto de variable y función. Relación entre tipos de razonamiento matemático. Estudio de las ecuaciones lineales. El carácter algebraico de las tareas. La zona de emergencia del razonamiento algebraico.	Profundizar en el análisis de la zona de emergencia del razonamiento algebraico. Algebrizar el currículo.

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

El objetivo de esta investigación documental consistió en identificar las tendencias y desafíos en cuanto al álgebra escolar y su relación con los procesos de argumentación en Educación Matemática. En este sentido, se lograron identificar ciertas tendencias y desafíos en cada una de las categorías propuestas. Se evidencia la falta de acuerdo dentro de la comunidad en cuanto a la naturaleza del razonamiento algebraico, a pesar de que la mayoría de las investigaciones concuerdan en que los procesos de generalización son la principal característica de este campo. Además, la revisión muestra que la principal dificultad para desarrollar el razonamiento algebraico se presenta en el lenguaje simbólico, los recursos semióticos y la falta de conciencia de los estudiantes en relación a los procesos involucrados al operar con estos y dar sentido a los conceptos algebraicos.

Algunas de las tendencias muestran la dicotomía persistente entre el paso de la aritmética al álgebra y han centrado su atención en la zona de emergencia del álgebra. En este sentido, podría ser objeto de investigación indagar por las formas de pensamiento de los estudiantes y reconocer los aspectos que los llevan a cambiar de un pensamiento informal a uno formal. Entender este proceso puede ser clave para facilitar dicho tránsito. Otras tendencias se enfocan en los conocimientos pedagógicos de los profesores de matemáticas, donde se hace evidente la necesidad y relevancia de diseñar y proponer tareas que fomenten competencias en los estudiantes.

En relación con los desafíos, se destaca la necesidad de abordar investigaciones orientadas al fortalecimiento de ciertos procesos en los estudiantes, como la comunicación, el razonamiento y la argumentación. Para ello, es importante profundizar en la comprensión de la zona de emergencia del álgebra, a fin de reflexionar sobre la enseñanza de este tipo de conocimiento. Otros desafíos identificados son: la necesidad de establecer un acuerdo sobre la naturaleza del álgebra escolar; el énfasis que se debe dar al diseño y aplicación de intervenciones en educación secundaria; el uso de parámetros para el estudio de las estructuras algebraicas; el empleo de problemas abiertos para la enseñanza del álgebra; la importancia de reflexionar sobre las prácticas en el aula; y la profundización en la zona de emergencia del razonamiento algebraico.

Además, se plantea la posibilidad de realizar investigaciones enfocadas en el uso y manejo de parámetros en las estructuras algebraicas por parte de los estudiantes, con el fin de llegar a un consenso sobre la naturaleza del razonamiento algebraico. Asimismo,

resulta importante profundizar en estudios sobre la zona de emergencia del razonamiento algebraico mediante estrategias que fomenten el desarrollo de competencias matemáticas, permitiendo así comprender el vínculo entre estas, por ejemplo, entre el razonamiento algebraico y la argumentación.

Referencias

- Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del Razonamiento algebraico elemental en Maestros en formación*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf
- Bautista, J., Bustamante, M. y Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación Matemática*, 33(1), 125-152. <https://doi.org/10.24844/em3301.05>
- Bjuland, R. (2012). The mediating role of a teacher's use of semiotic resources in pupils' early algebraic reasoning. *ZDM Mathematics Education*, 44, 665-675. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0421-2>
- Burgos, M. (2020). *Niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desde las perspectivas institucional y personal. Implicaciones para la formación de profesores de matemáticas*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/62889>
- Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D., y Pino-Fan, L. R. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: Análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT*, 6(2), 164-191. <https://doi.org/10.17583/redimat.2017.1981>
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2019). Investigating early algebraic thinking abilities: a path model. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 528-531). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02415996>
- Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E. y Christou, C. (2013). Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 205-223. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9448-0>
- Develaki, M. (2020). Comparing Crosscutting Practices in STEM Disciplines. *Science y Education*, 29(4), 949-979. <https://doi.org/10.1007/s11191-020-00147-1>

- Durango, J. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso*. [Tesis doctoral, Universidad de Antioquia. http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/2524/1/JC01_091_johnhenrydurango_argumentaciongeometria.pdf]
- Echeverry, A. (2020). *Diseño de tareas de geometría tridimensional que promueven la generación de incertidumbre y necesidad intelectual de argumentar en futuros profesores de matemáticas*. [Tesis doctoral, Universitat de Valencia]. <https://roderic.uv.es/handle/10550/78339>
- Ellis, A., Ely, R., Singleton, B. y Tasova, H. (2020). Scaling-continuous variation: supporting students' algebraic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 104(1), 87-103. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09951-6>
- Eriksson, H. y Sumpter, L. (2021). Algebraic and fractional thinking in collective mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 108(3), 473-491. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10044-1>
- Flores, W. y Azumendi, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e Interculturalidad*, 19(2), 54-64. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6462023>
- Fu, Y., Qi, C. y Wang, J. (2022). Reasoning and Proof in Algebra: The Case of Three Reform-Oriented Textbooks in China. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(1), 130-149. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00199-1>
- Gaita, R. y Wilhelmi, M. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 269-289. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Godino, J.D., Neto, T. Wilhelmi, M.R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas*. [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/299192/mg1de1.pdf?sequence=5.txt>
- Hackenberg, A., Aydeniz, F. y Jones, R. (2021). Middle school students' construction of quantitative unknowns. *The Journal of Mathematical Behavior*, 61, 1-19. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312320300961>
- Hackenberg, A. y Lee, M. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 245-263. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9704-9>
- Hewitt, D. (2019). "Never carry out any arithmetic": the importance of structure in developing algebraic thinking. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 558-565). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416275>
- Higueta, C., Gómez, M. y Jaramillo, D. (2015). El estado del arte: una metodología de investigación. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, 6(2), 423-442. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=497856275012>
- Hunter, J. (2014). Developing learning environments which support early algebraic reasoning: a case from a New Zealand primary classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 659-682. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0093-4>
- Hunter, J., Anthony, G. y Burghes, D. (2018). Scaffolding Teacher Practice to Develop Early Algebraic Reasoning. En Kieran, C. (Ed.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_16
- Hunter, J. y Miller, J. (2022). Using a Culturally Responsive Approach to Develop Early Algebraic Reasoning with Young Diverse Learners. *International Journal of Science and Mathematics Education* 20(1), 111-131. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10135-0>
- Kilhamn, C. y Bråting, K. (2019). Algebraic thinking in the shadow of programming. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 566-573). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02429028>
- Kop, P., Janssen, F., Drijvers, P. y van Driel, J. (2019). Graphing formulas to give meaning to algebraic formulas. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*

- (pp. 582-589). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416367>
- Kohanová, I. y Solstad T. (2019). Linear figural patterns as a teaching tool for preservice elementary teachers – the role of symbolic expressions. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 574-581). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416345>
- Lee, M. y Hackenberg, A. (2014). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: the case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(4), 975-1000. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9442-8>
- Mariño, L. (2020). *Avances en la caracterización del pensamiento variacional Emergente en el contexto del planteo y resolución de Problemas en profesores de matemáticas en formación*. [Tesis doctoral, Universidad Antonio Nariño]. <http://repositorio.uan.edu.co/handle/123456789/2241>
- Mariño, L., Falk-de Losada, M. y Hernández, R. (2021). Una caracterización del pensamiento variacional desde la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas y la teoría fundamentada. *Eco Matemático*, 12(1), 13-25. <https://doi.org/10.22463/17948231.3065>
- Medová, J., Bulková, K. y Čeretková, S. (2020). Relations between Generalization, Reasoning and Combinatorial Thinking in Solving Mathematical Open-Ended Problems within Mathematical Contest. *Mathematics*, 8, 1-20. <https://doi.org/10.3390/math8122257>
- Molina, O. (2019). *Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación*. [Tesis doctoral, Universidad de Los Lagos]. http://edumat.ulagos.cl/portal/wpcontent/uploads/2019/02/SistemaNormasInfluyenProcesosArgumentaci%C3%B3n_CursoGeometr%C3%ADaEspacioEscenarioInvestigaci%C3%B3n_OscarMolina.pdf
- Nilsson P. y Eckert, N. (2019). Color-coding as a means to support flexibility in pattern generalization tasks. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 614-621). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416406>
- Opsal, H. (2019). How students in 5th and 8th grade in Norway understand the equal sign. En Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. <https://hal.science/hal-02416427>
- Otten, M., Panhuizen, M., Veldhuis, M. y Heinze, A. (2019). Fifth-grade students solving linear equations supported by physical experiences. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 646-653). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416443>
- Palacios, L. y García, L. (2018). Demanda cognitiva de estándares educativos y libros de texto para la enseñanza del álgebra en Honduras. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 32(62), 1134-1151. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a19>
- Posada, P. (2010). *Argumentación, teoría y práctica: manual introductorio a las teorías de la argumentación*. [Tesis doctoral, Universidad del Valle].
- Penagos, M. (2021). *Relaciones entre esquemas de demostración de teoremas y resolución de problemas. Avances en la caracterización del pensamiento algebraico*. [Tesis doctoral, Universidad Antonio Nariño]. <http://repositorio.uan.edu.co/handle/123456789/5097>
- Quintero, C. (2018). *Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes de grado undécimo en un proceso de objetivación del concepto de límite de una función*. [Tesis doctoral, Universidad de Antioquia]. <http://hdl.handle.net/10495/13738>
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 4(2), 37-62. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169>
- Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Rodrigues, M. y Serrazina, L. (2019). Dealing with quantitative difference: A study with second graders. En Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 674-681). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416469>

- Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. [Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/algebra_escolar_y_pensamiento_algebraico_aportes_para_el_trabajo_en_el_aula.pdf
- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34. http://sinewton.es/revista_numeros/077/
- Soneira, C. (2022). The Use of Representations when Solving Algebra Word Problems and the Sources of Solution Errors. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(5), 1037-1056. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10181-2>
- Toro, J. (2020). *Argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase*. [Tesis doctoral, Universidad de Antioquia]. <http://hdl.handle.net/10495/15619>
- Toro, J. y Castro, W. (2020). Condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(1), 35-44. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.11>
- Torres, M., Moreno, A. y Cañadas, M. (2021). Generalization Process by Second Grade Students. *Mathematics*, 9(10), 1-19. <https://doi.org/10.3390/math9101109>
- Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments*. Cambridge University Press.
- Valoyes-Chávez, L. E. y Zapata-Ramos, P. A. (2021). Cultura de la enseñanza del álgebra en contextos marginalizados. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 51. <https://doi.org/10.17227/ted.num51-11604>
- Vergel, R (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. [Tesis Doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2608>
- Vergel, R. y Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Zapata, S. (2019). *Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano*. [Tesis doctoral, Universidad de Antioquia]. <https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/14855>
- Zapatera, A. y Quevedo, E. (2021). The Initial Algebraic Knowledge of Preservice Teachers. *Mathematics*, 9(17), 2117. <https://doi.org/10.3390/math9172117>