

# Las representaciones gráfico-geométricas del Teorema de Pitágoras en un aula inclusiva

■ THE GRAPHIC-GEOMETRIC REPRESENTATIONS OF THE PYTHAGOREAN THEOREM IN AN INCLUSIVE CLASSROOM

■ AS REPRESENTAÇÕES GRÁFICO-GEOMÉTRICAS DO TEOREMA DE PITÁGORAS NUM SALA INCLUSIVA

Samuel Enrique Galvis Martínez\* / lomack\_sg@hotmail.com

Rafael Alejandro González Puello\*\* / rafaelgonf1@hotmail.com

Elizabeth Torres Puentes\*\*\* / elizatorrespuentes@gmail.com

## Resumen

El presente artículo quiere mostrar las estrategias de representación gráfico-geométrica respecto al teorema de Pitágoras, usadas por un grupo de estudiantes videntes e invidentes del grado séptimo en el contexto de un aula inclusiva. Para la investigación que dio origen a este artículo se construyó una secuencia didáctica con base en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), que permitió evidenciar la construcción geométrica y algebraica del teorema en mención.

## Summary

This article aims to show the graphic-representation strategies regarding geometric Pythagorean theorem, used by a group of blind and sighted students in seventh grade in the context of an inclusive classroom. For research that led to this paper, a teaching sequence based on the theory of didactic situations Brousseau (1986), which allowed to demonstrate the geometric and algebraic construction of the theorem in question was built.

## Resumo

O presente artigo quer mostrar as estratégias de representação gráfico-geométrica com respeito ao teorema de Pitágoras, usadas por um grupo de estudantes videntes e cegos do grau sétimo no contexto de um sala inclusiva. Para a investigação que deu origem a este artigo se construiu uma sequência didáctica com base na situações didácticas de Brousseau (1986), que permitiu evidenciar a construção geométrica e algébrica do teorema em menção.

## Palabras clave

Representaciones gráfico-geométricas, Teorema de Pitágoras, inclusión, ceguera, necesidades educativas especiales.

## Key words

Graphic-geometric representations, Pythagorean Theorem, including blindness, special educational needs.

## Palavras chave

Representações gráfico-geométricas, Teorema de Pitágoras, inclusão, cegueira, necessidades educativas especiais.

\* Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la universidad Distrital Francisco José de Caldas.

\*\* Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la universidad Distrital Francisco José de Caldas.

\*\*\* Docente Universidad Distrital. Estudiante de Doctorado en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fecha de recepción: 14 de agosto de 2013 / Fecha de aprobación: 17 de octubre de 2013

## Introducción

El presente artículo es producto de una investigación que trabajó con una población estudiantil de grado séptimo en un colegio del Distrito Capital, la población objeto de estudio estuvo compuesta por estudiantes videntes y algunos en situación de limitación visual. Para realizarla se propuso una situación basada en el Teorema de Pitágoras, y tuvo como fin realizar un aporte a las representaciones gráfico-geométricas diseñadas por los estudiantes cuando abordan este tema, siempre manteniendo las adaptaciones pertinentes y conservando la actitud inclusiva dentro del aula.

Para el estudio se tuvieron en cuenta los aportes propuestos por la Constitución Política de 1991, la Ley General de Educación 115 y el Plan Decenal de Educación, como referente legal. Además, se consideraron algunos autores expertos en inclusión y educación matemática, como Rosich (1998); para el tratamiento teórico sobre los procesos de aprendizaje del Teorema de Pitágoras se acogieron las tesis de Godino (2002), Alsina (1989) y Corberán (s.f).

Se usó la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986) como metodología de diseño y gestión, dividida en cuatro sesiones de clase, una sesión para la fase de acción, la segunda que comprende las etapas de formulación-validación, la tercera, de institucionalización y, por último, una de evaluación. Como teoría de aprendizaje se abordó lo propuesto por los esposos Van Hiele, cuyos niveles se usaron para categorizar a los estudiantes según sus procesos de aprendizaje.

## Problematización

Se ha evidenciado que el desarrollo de conceptos propios de la Geometría por parte de estudiantes con limitación visual, particularmente de aquellos conceptos que exigen un nivel de manipulación de instrumentos de construcción geométrica, como el Teorema de Pitágoras, representan retos importantes para los profesores de matemáticas a nivel didáctico y más aún en contextos de aulas inclusivas. Esta problemática se caracteriza por tres tensiones.

La primera tensión es la dificultad para que las personas con limitación visual tengan un proceso de construcción de objetos geométricos con regla y compás, pues en la mayoría de los casos no se les enseña a dibujar o manipular los instrumentos de dibujo como son el kit geométrico y las tablas positivas y negativas. Tanto videntes como invidentes realizan la construcción de objetos geométricos por medio de representaciones gráfico-geométricas, entendidas como dibujos que deben ser entendibles, justificados y con un fin claro.

Según Rosich (1998), las representaciones gráfico-geométricas sirven como un medio de comunicación entre el profesor, el estudiante con limitación visual y el vidente. Para ello, existen instrumentos que contribuyen a estas destrezas, pero si el estudiante con limitación visual no las sabe usar, es complicado que las construya, lo que hace parecer que los instrumentos sirven más al profesor que a los estudiantes con limitación visual. Esto acompañado de que dichos instrumentos en algunas ocasiones son muy antiguos y requieren de un tipo especial de papel, es el caso de las láminas de caucho, que pueden llegar a ser costosas. El no uso de instrumentos impide el proceso de representación y lenguaje del estudiante frente a los objetos matemáticos.

Para los estudiantes con limitaciones visuales el lenguaje gráfico-geométrico es un puente favorable entre la manipulación de material y un objeto matemático trabajado o a trabajar, funcionando como medio para evidenciar esquemas que realiza interiormente. Existen muchos instrumentos que sirven para llevar a cabo las representaciones gráfico-geométricas, sin embargo, el tiempo necesario para utilizarlos y desarrollar los objetos geométricos en el aula es significativo, y las dinámicas escolares impiden que el profesor tenga un tiempo especial para trabajar dichas construcciones con los estudiantes. Esto también implica una problemática a la hora de representar el Teorema de Pitágoras, la situación debe estar muy bien estructurada para que la representación que realice el estudiante con limitación visual sea entendible y se preste para un respectivo análisis y proceso de regulación.

La segunda tensión es la inclusión de los niños ciegos al aula regular, esta particularidad no se soluciona sólo con ejercicios de sensibilización por parte de las perso-



**Vilma Martínez Rivera** » Título: Nacimientos: Vuelo suspendido en la espiral infinita » Año: 2010 » Fotografía: Gustavo Gutiérrez

nas videntes, pensando en las dificultades o diseñando una metodología a partir de ello; requiere ir más allá y desarrollar acciones en el aula que realmente conlleven a una educación inclusiva. Por consiguiente, es necesario investigar sobre posibles adaptaciones metodológicas, es decir instrumentos y teorías sobre mediación educativa, relacionadas con las necesidades educativas especiales y la mejor manera de lograr la inclusión del estudiante invidente al aula de clase regular.

En este orden de ideas, es necesario recalcar que los estudiantes con limitación visual están más expuestos a la exclusión en el aula de matemáticas, ya que al no haber desarrollado procesos visuales como los videntes, las nociones geométricas necesitan de mayor tiempo para ser construidas, lo que puede frustrar al profesor, a sus compañeros y al mismo estudiante invidente. Además, se debe recordar que las personas con ceguera congénita no tienen alguna representación visual del medio que los rodea, por tanto adquieren información a través de los demás sentidos y la comunicación sostenida con las personas a su alrededor.

Finalmente, la tercera tensión, corresponde a que no se potencian las construcciones geométricas en el aula de integración, entre otras cosas porque no existen lineamientos curriculares que contemplen metodologías para trabajar con las poblaciones con Necesidades Educativas Especiales -NEES-, por tal motivo es necesario tratar de adaptar el currículo para desarrollar las competencias matemáticas que se proponen en los estándares de matemáticas. Comes (2003), establece que los objetivos propuestos deben ser alcanzados por todos y deben ser siempre los mismos, el problema está en que para algunos estudiantes, como quienes presentan necesidades educativas especiales, deben seguirse procedimientos y utilizar recursos y metodologías modificadas con el fin de igualar las condiciones y permitir que el proceso de aprendizaje sea alcanzable por todos.

Las tres tensiones antes descritas llevan a la pregunta por: ¿cómo favorecer la comprensión de las representaciones y la construcción geométrica del Teorema de Pitágoras, en estudiantes videntes y con limitación visual, en el grado séptimo, por medio del diseño, gestión y evaluación de una secuencia didáctica que privilegie la adaptación de material inclusivo?

## Recursos teóricos

Podemos decir que el Teorema de Pitágoras es el más usado en geometría, desde el punto de vista teórico y práctico, como herramienta para calcular ángulos, áreas, distancias, entre otros. Además, la geometría tiene un papel importante dentro de la educación secundaria, y por tanto no es sólo conocido sino también usando ampliamente por los alumnos. A continuación se presentan dos demostraciones de dicho Teorema, las cuales se espera que los estudiantes construyan al manipular la situación fundamental.

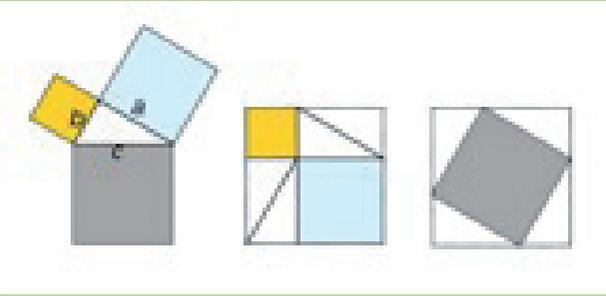
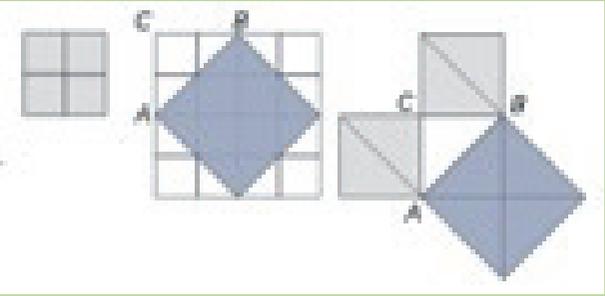
La población con la que se desarrolló la investigación corresponde a niños y niñas del grado séptimo, que concurren a un aula inclusiva para niños con discapacidad visual, en esta línea se entiende el concepto de NEE de acuerdo a lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional en sus *Lineamientos de política para la atención educativa a la población con necesidades educativas especiales* (2005):

“[...] hace referencia a aquellos estudiantes que presentan dificultades mayores que el resto para acceder a los aprendizajes que les corresponden por edad o que presentan desfases con relación al currículo por diversas causas, por las cuales pueden requerir, para progresar en su aprendizaje, de medios de acceso al currículo, adaptaciones curriculares, servicios de apoyo especiales, adecuaciones en el contexto educativo o en la organización del aula” (p. 20).

Es importante aclarar que las necesidades educativas especiales pueden derivarse de factores relacionados con las dimensiones del desarrollo humano, tales como: factores cognitivos, físicos, sensoriales, de la comunicación, emocionales y psicosociales.

Lo establecido por la Ley 115, de febrero 4 de 1994, explicita las modalidades de atención educativa a poblaciones con discapacidades, es decir, educación para personas con limitaciones especiales, para ello tiene en cuenta los artículos 46, 47 y 48, en los cuales se menciona el derecho a la educación y a un trabajo especializado que atienda sus necesidades; de esta manera, garantiza el apoyo del Estado en la realización de convenios con entidades especializadas que permita a

Tabla 1. Representaciones del Teorema de Pitágoras

Demostración 1	Demostración 2
	
<p>Partiendo de la configuración inicial, con el triángulo rectángulo de lados <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math>, y los cuadrados correspondientes a catetos e hipotenusa (figura de la izquierda), se construyen dos cuadrados iguales:</p> <p>Uno de ellos (figura del centro) está formado por los cuadrados de los catetos, más cuatro triángulos rectángulos iguales al triángulo inicial.</p> <p>El otro cuadrado (figura de la derecha) lo conforman los mismos cuatro triángulos, y el cuadrado de la hipotenusa.</p> <p>Si a cada uno de estos cuadrados le quitamos los triángulos, evidentemente el área del cuadrado gris (<math>c^2</math>) equivale a la de los cuadrados amarillo y azul (<math>b^2+a^2</math>), habiéndose demostrado el teorema de Pitágoras.</p>	<p>Se construye un cuadrado cuyo lado es de dos unidades (figura de la izquierda). Su área equivale a cuatro unidades cuadradas. Trazando un nuevo cuadrado sobre su diagonal <math>AB</math>, se obtiene un cuadrado de ocho unidades cuadradas (figura del centro), doble superficie de la del primero. Aquí se obtiene la duplicación del cuadrado, pero también se ha demostrado el teorema de Pitágoras (figura de la derecha): el área del cuadrado azul (8 unidades cuadradas), construido sobre la hipotenusa <math>AB</math> del triángulo rectángulo <math>ABC</math>, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados grises (4 unidades cuadradas cada uno) construidos sobre los catetos <math>AC</math> y <math>BC</math>.</p> <p>Es importante destacar que esta demostración sólo funciona cuando el triángulo en cuestión es isósceles rectángulo.</p>

esta población un óptimo desarrollo cognitivo. Además, el Plan Decenal (2006-2016), señala que:

“[...] el sistema educativo debe garantizar a niñas, niños, jóvenes y adultos, el respeto a la diversidad de su etnia, género, opción sexual, discapacidad, excepcionalidad, edad, credo, desplazamiento, reclusión, reinserción o desvinculación social, y generar condiciones de atención especial a las poblaciones que lo requieran” (p. 4).

Esto implica que se implementen equipos y tecnologías pertinentes, además de profesores con cualidades necesarias, para la formación en un aula inclusiva. Con este objetivo, se sugiere la gestión e inversión de recursos del Estado que garanticen el ingreso y permanencia de la población con discapacidades al sistema educativo, comenzando desde preescolar hasta la educación superior. Así mismo, se deben garantizar los apoyos necesarios para disminuir las barreras en el aprendizaje y promover el acceso y participación en un sistema pertinente y de calidad. Por último, señala que se debe incrementar en un 20% el presupuesto y promover la

innovación de propuestas pedagógicas pertinentes para el trabajo en el aula con esta población.

En cuanto al componente didáctico, entendido como recurso didáctico, resulta necesario abordar, en primer lugar, las representaciones en contextos matemáticos, entendidas como notaciones simbólicas, gráficas o verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en este aspecto, así como sus características y propiedades más notables. Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación según sean las características que posean (Duval, 1999); dentro de estos registros se pueden llevar a cabo diferentes procesos, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas.

Usualmente una categorización inicial de representaciones puede dividirse en dos categorías: externas e internas; las primeras abarcan todas aquellas representaciones que son percibidas por los sentidos; mientras que las internas son imágenes de la mente que el sujeto tiene de los objetos y relaciones que forman parte de su conocimiento (Duval, 1999). Las representaciones externas tienen diferentes funciones: sirven para comunicar, para objetivar y pueden ser manipuladas.

En este orden de ideas, Duval (1995), considera que las representaciones externas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son de fácil percepción a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema de signos.

*“Las representaciones semióticas, en comparación de las mentales, presentan el grado de libertad necesario para todo tratamiento de la información, pudiendo expresar contenidos diferentes puesto que se sitúan en el plano de la expresión. No así las representaciones mentales que, al situarse en el plano del contenido, son de contenido único. La diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos” (Duval, 1995, p.120).*

Por medio de las representaciones es posible reconocer estrategias y procedimientos usados por los estudiantes al resolver las tareas propuestas, ya que con ellas se puede establecer una relación entre el objeto matemáti-

co tratado, así mismo permiten establecer una relación entre las representaciones internas y externas basadas en dicho objeto matemático.

Más allá de la definición global de representaciones, el Teorema de Pitágoras podrá ser estudiado por medio de las representaciones gráfico-geométricas que realicen los estudiantes. Según Rosich (1998), las expresiones gráfico-geométricas están relacionadas con el dibujo, en donde este elemento es utilizado como un instrumento de comunicación a la hora de representar una tarea matemática o cualquier otra situación. Además, dichas representaciones deben ser muy claras, para saber lo que se quiere decir con ellas, dar entender a lo que se está refiriendo, mostrando que lo que habla son aquellas representaciones o dibujos.

En ese sentido, Alsina (1989), da un papel especial a las representaciones y afirma que la representación gráfica desempeña un papel muy importante para expresar “nuestros conocimientos e ideas” (p. 63). Esta es considerada como una manera de comunicación, un lenguaje para expresar, en este caso, un lenguaje para que los estudiantes mencionen y expliciten sus conocimientos previos. Por lo general, los estudiantes realizan representaciones abstractas de dibujo técnico, pues copian mentalmente la figura dada, utilizando instrumentos de apoyo como la regla, considerada como el instrumento geométrico clásico. Este tipo de signo es considerado también una representación gráfica plana y modelo de representación concreta.

Las representaciones pueden aparecer de tres maneras: por simple observación, una ilustración de un texto o saber cómo se generó dicha representación; mediante la reproducción, en donde el estudiante toma apuntes del tablero sin realizar ningún tipo de meditación o reflexión; y finalmente, como una producción autónoma, entendiéndose como aquellas representaciones interiorizadas, plasmadas como diálogos o como signos en dibujos.

Con respecto a la enseñanza de la geometría para personas con limitaciones visuales, ésta puede ser realizada mediante los materiales concretos que el alumno sabe manipular, tales como el uso de sus dos manos, algo muy natural en el ser humano, e instru-



**Vilma Martínez Rivera** » Título: Nacimientos: arrullo de ljkas al nacer. » Año: 2010 » Fotografía: Gustavo Gutiérrez

mentos inclusivos como la regla milimetrada, planos positivo y negativo, rodachina, compás u hojas bond, que facilitan la realización de sus representaciones. Luego es posible abandonar el uso de estos materiales concretos, pero esto no significa que se esté despreciando la experimentación.

Debido a la limitación visual, el estudiante se ve obligado a utilizar otros sentidos para la aprehensión de conocimientos geométricos; el más pertinente es el tacto, por medio del cual le es posible captar de otro modo la lógica del concepto enseñado. En cuanto a este punto particular, resulta necesario destacar que, como afirma Rosich (1998), muchos docentes de matemáticas no han sido formados con bases suficientes para promover la inclusión en el aula de clase y por ello les resulta difícil encontrar formas pertinentes de llevar a las aulas un trabajo práctico y efectivo del conocimiento geométrico. En este ámbito, una metodología inclusiva puede ser un componente curricular catalizador de capacidades.

Por otro lado, cuando el estudiante empieza a realizar su representación, comienza a plasmarla a través de dibujos entendibles utilizando lo que conoce de la imagen, según Taborda (2008), esto se denomina proceso de esquematismo, pues busca que lo que dibuja represente lo que sabe de ese objeto, sin importar si son figuras bidimensionales o tridimensionales. Por otro lado, puede que el estudiante no se encuentre en etapa de esquematismo, sino en una de realismo intelectual, ya que, contrario del esquematismo, comienza a dibujar no lo que realmente ve sino todo lo que sabe que está allí (Maljuí, 1983). Los estudiantes también identifican una figura que se repite en la representación y es utilizada como referencia para determinar relaciones de área y longitud, situación que es denominada por Godino (2002), como “figura de referencia”.

Cuando los estudiantes superan la etapa de esquematismo, desarrollan la noción topológica de separación, ya que reconocen y diferencian los elementos que constituyen la configuración espacial específica dada por su representación, y con esto entienden el área como número de unidades que recubren la superficie, lo cual, según Alsina (1989), es considerado una manifestación la misma y esto ayuda a los estudiantes a enfrentarse

significativamente al estudio de la magnitud del área como resultante del producto entre magnitudes lineales, siendo el concepto clave para determinar el área como una superficie, con el fin de obtener su valor.

Para dar cuenta de la noción de área, los estudiantes por lo general recubren la figura de su representación solapando figuras hasta envolver completamente la superficie total de la representación original; hecho que Corberán (s.f.) entiende como necesario para que comprendan que la unidad debe recubrir exactamente la superficie. Con el solapado, se pueden evidenciar las distintas características que comprenden la unidad de medida, es decir, reproducible, fácilmente divisible, y sin huecos en su superficie al momento de recubrirla con unidades o sus partes. Según Alsina (1989), una de las primeras apreciaciones de los estudiantes es teselar las figuras con otras congruentes, es decir que figuras con la misma área y configuración pueden ser tomadas como referencia para rellenar espacios y encontrar relaciones de área.

El trabajo realizado utilizó el modelo de Van Hiele como teoría soporte para describir el aprendizaje de los estudiantes, el cual está organizado en niveles y fases. La característica principal de los niveles de Van Hiele es que son dependientes, lo que significa que la superación de un nivel no implica la necesidad de dejar atrás las habilidades propias que se tienen del nivel anteriormente alcanzado. Estos niveles son progresivos, ya que representan cuatro grados de desarrollo de procesos matemáticos, además cada nivel es dependiente del anterior, es decir, razonar en el segundo nivel es imposible sin la habilidad de razonar en el primero. Por lo tanto, para adquirir un nivel de razonamiento es necesario haber adquirido antes el nivel precedente.

Otra característica significativa de los niveles de Van Hiele es que el avance de un nivel a otro se produce de manera progresiva. El razonamiento, no se logra de buenas a primeras, sino que la experiencia en la elaboración de tareas o actividades, y la utilización de la resolución de problemas, aportan a que poco a poco se vayan obteniendo esas nuevas destrezas. Con ello, los estudiantes comenzarán a aplicarlas en situaciones sencillas y alcanzarán más adelante las habilidades suficientes para aplicarlas en contextos más complejos.

En este sentido, Fouz y Donosti (s.f.), sugirieron la siguiente tabla que permite relacionar las características del modelo Van Hiele (secuenciación, jerarquización y recursividad) evidenciando que lo que es implícito en un nivel se convierte en algo explícito para el siguiente.

De acuerdo con este modelo se propusieron los siguientes niveles de evaluación del aprendizaje considerando el diseño y gestión de la secuencia didáctica.

**Tabla 2.** Relación de las características en el modelo Van Hiele

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras
NIVEL 1	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal del teorema
NIVEL 3	Deducción formal del teorema	Relación entre teoremas (sistemas axiomáticos)

**Tabla 3.** Niveles de evaluación de aprendizaje a partir del diseño y gestión de la secuencia didáctica

Nivel	Descriptores	
	Elementos explícitos	Elementos implícitos
<b>Visualización</b>	<p>Figuras y objetos</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Su representación gráfica de la situación fundamental se contempla como un todo</li> <li>Realiza un proceso de esquematismo, pues busca que el dibujo represente lo que sabe de ese objeto</li> <li>Identifica las figuras de su representación por su apariencia global</li> <li>Identifica, nombra, describe y compara las figuras geométricas involucradas en la representación de la situación fundamental</li> <li>Establece una figura de referencia para llegar a relación de área que incide sobre las figuras de su representación</li> </ol>	<p>Partes y propiedades de las figuras y objetos</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Identifica partes de las figuras que se encuentran en su representación, pero no analiza las figuras en términos de sus componentes</li> <li>Se le dificulta recurrir a las propiedades de los triángulos y los cuadrados para caracterizar la clase de figuras que componen la representación de la situación fundamental</li> <li>No hace generalizaciones referidas a las figuras (cuadrados y triángulos) que componen sus representaciones</li> </ol>
<b>Análisis de propiedades</b>	<p>Partes y propiedades de las figuras y objetos</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Analiza las figuras involucradas en su representación gráfico-geométrica de la situación fundamental, en términos de sus componentes</li> <li>hace uso de teselados para evidenciar relaciones de área entre las figuras</li> <li>Describe las partes de las figuras usadas en la representación</li> <li>Utiliza descripciones antes que definiciones al referirse a su representación gráfico-geométrica</li> <li>Descubre o prueba propiedades o reglas aplicadas a las figuras de manera empírica (ensayo error)</li> </ol>	<p>Implicaciones entre propiedades</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Después de reconocer las propiedades de los triángulos que componen su representación, no justifica que todos ellos son rectángulos</li> <li>Identifica características del triángulo rectángulo pero no identifica el conjunto de propiedades necesarias para definirlo</li> <li>Considera que el área sólo es el cálculo de su medida, es decir la multiplicación de segmentos, más no como superficie</li> </ol>
<b>(Deducción informal)</b>	<p>Implicaciones entre propiedades</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Entiende el papel de las definiciones para caracterizar las figuras que componen su representación</li> <li>Establece una organización entre figuras de acuerdo con sus lados y ángulos</li> <li>Ordena las figuras de su representación del Teorema de Pitágoras, de acuerdo con sus características, como área y la longitud de sus lados</li> <li>Usa argumentos informales para deducir de manera lógica que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.</li> </ol>	<p>Deducción formal de teoremas</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Se le dificulta comprender el significado de la deducción de la sumatoria de áreas en un sentido axiomático, para el cálculo de una longitud (no ve la necesidad de las definiciones y supuestos básicos)</li> <li>No distingue formalmente entre una afirmación, en este caso <math>a^2 + b^2 = c^2</math> y sus derivadas <math>a^2 \mid b^2 = c^2</math></li> <li>No establece relaciones entre redes de teoremas, por ejemplo LLL, LAL, ALA, para el caso de triángulos semejantes</li> </ol>

Para el trabajo fue conveniente el uso la teoría de situaciones didácticas de Brousseau como guía de diseño para la secuencia didáctica; dicha teoría entiende una situación como un modelo de interacción entre un estudiante y cierto medio que determina un conocimiento dado, en este caso, los procesos de generalización como el recurso del que dispone el estudiante para alcanzar un estado favorable. De esta manera el tipo de situaciones planteadas durante la clase, coinciden con el requisito indispensable de tener ciertos conocimientos necesarios para construir nuevos conocimientos, los cuales fueron determinados e identificados por la actividad diagnóstico y se han de superar en la medida que intervienen las siguientes situaciones:

- Situaciones de acción: donde se pone en juego la implementación de los conocimientos implícitos y necesarios para abordar los casos de factorización, desde los procesos de generalización.
- Situaciones de formulación: en base a los procesos de generalización, los estudiantes emiten y reciben de manera explícita una serie de mensajes que contienen las diferentes representaciones y niveles conceptuales de dicha concepción.

- Situaciones de validación: son aquellas donde los alumnos han de tener una postura frente a las afirmaciones de las que disponen, teniendo en cuenta las comprensiones y construcciones que han superado respecto a los procesos de generalización.

Lo anterior se relaciona con uno de los elementos más importantes para esta teoría: “la señal que convoca a conocer, para cada grupo de conceptos, qué problemas matemáticos darían lugar a construcciones potentes en el aula” (Brousseau, citado en Sodovsky, 1986. p. 89).

### La secuencia didáctica

Para efectos de la investigación que dio origen a este artículo, se propuso a un grupo de 35 estudiantes videntes y un en situación de invidencia, una secuencia didáctica con tres escenarios que componen un ambiente fundamental cuya estructura se presenta a continuación:

**Tabla 4.** Situación fundamental y fases de trabajo

Situación fundamental: Se va a celebrar un festival de cometas en tu colegio, aprovechando la brisa del mes de agosto. Cada estudiante del grado séptimo deberá construir una cometa de forma cuadrada usando una pieza de papel celofán dada por el profesor. Esta pieza también tendrá forma cuadrada. La cometa tiene 2 palos de balsa que sirven como soporte, ubicados en sus diagonales, cada uno de 50 cm de largo.

Cada vértice de la cometa debe coincidir con un lado distinto del trozo de papel cuadrado dado por el profesor. Además, cuando se recorta la cometa sobran cuatro triángulos rectángulos isósceles, los cuales servirán después como adorno. Finalmente, después de recortar y colocar los balsos, se debe contornear la cometa con lana para darle colorido.

Mario dice que necesita 141,42 cm de lana para contornear la cometa, mientras que Raquel afirma que se necesitan 35,3 cm de lana. ¿Quién tiene la razón?

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"><b>Fase de acción</b></p>	<p><b>Objetivo General</b></p> <p>Generar a través del abordaje de una situación fundamental, el desarrollo de conjeturas, hipótesis y la toma de decisiones en los estudiantes, en el cual, a través de la aplicación de sus conocimientos previos, les sea posible tomar un camino que les permita llegar a la construcción del Teorema de Pitágoras.</p> <p><b>Objetivos Específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para explorar posibles soluciones individuales a la situación propuesta</li> <li>• Motivar a los estudiantes para que realicen representaciones gráficas de sus hipótesis propuestas para dar solución a la situación</li> <li>• Caracterizar los roles del estudiante y del profesor en las fases de la TSD, propuestas (acción)</li> </ul>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"><b>Fase de formulación y validación</b></p>	<p><b>Objetivo General</b></p> <p>Generar en los estudiantes procesos de comunicación en un grupo de trabajo y motivar a la socialización crítica, donde cada grupo de trabajo expone sus argumentos sobre la resolución del problema, validando el proceso realizado, mientras los demás compañeros aprueban o refutan con argumentos propios y contundentes.</p> <p><b>Objetivos Específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Permitir el intercambio de ideas entre miembros de la clase, con el fin de transformar las apreciaciones que se tengan con respecto a la situación fundamental y generar nuevos razonamientos sobre la misma</li> <li>• Establecer consensos a nivel grupal sobre las estrategias de solución de la situación fundamental</li> <li>• Identificar la importancia del trabajo en equipo y de exponer sus ideas por medio de argumentos</li> </ul>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"><b>Fase de institucionalización</b></p>	<p><b>Objetivo General</b></p> <p>Formalizar todos aquellos aspectos trabajados durante el proceso de aplicación de la situación fundamental, evidenciando los resultados y todo lo que estuvo detrás de este objeto geométrico.</p> <p><b>Objetivo Específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dar a conocer la importancia del teorema de Pitágoras en el contexto matemático y sus beneficios cuando se aplica en situaciones de la vida cotidiana</li> <li>• Exponer la Relación Pitagórica como elemento para interpretar situaciones de la vida cotidiana</li> </ul>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"><b>Situación de evaluación</b></p>	<p><b>Objetivo General</b></p> <p>Legitimar y validar el conocimiento (Relaciones Pitagóricas y Teorema de Pitágoras) generado por los estudiantes a lo largo de las actividades en las distintas situaciones didácticas.</p> <p><b>Objetivos Específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisar el proceso logrado por los estudiantes contrastando sus nociones adquiridas con sus nociones previas</li> <li>• Reconocer estrategias, modelos, habilidades y raciocinios que han adquirido los estudiantes, sobre los diferentes conceptos que subyacen a la situación fundamental</li> </ul>

## Resultados-reflexiones finales

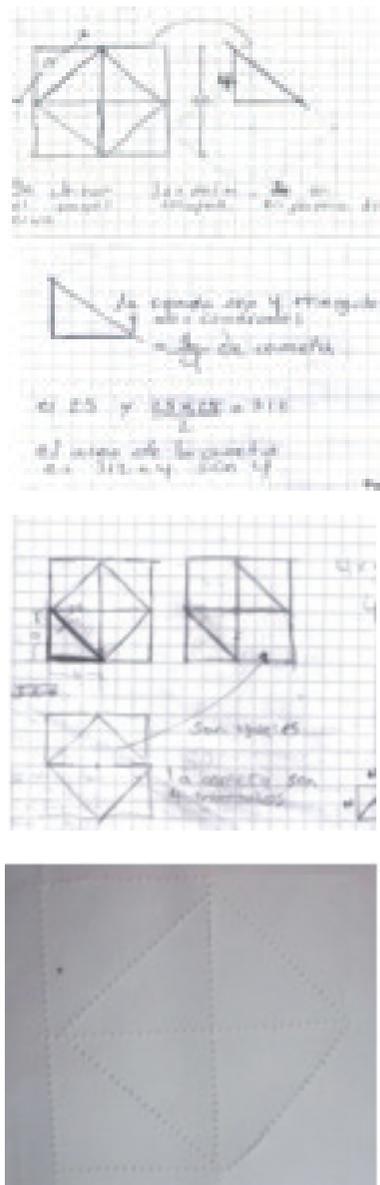
En cuanto al aporte a las representaciones gráfico-geométricas de los estudiantes, se puede decir que la situación fundamental diseñada, que comprendía gran variedad de representaciones modificables, y que contaba con el trabajo del palo de balsa como una variable didáctica, permitió a los jóvenes ver el problema desde diversas ópticas y comprender el Teorema de Pitágoras para distintos triángulos rectángulos (isósceles y escalenos).

**Imagen 1.** Fotografías del trabajo realizado



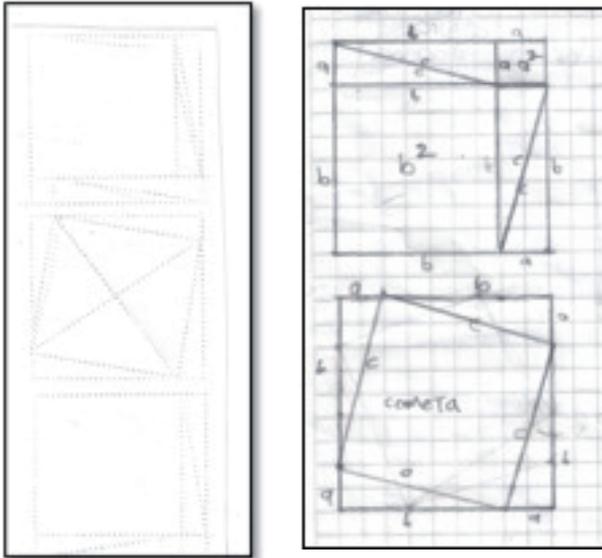
En un primer momento los estudiantes lograron demostrar el teorema para triángulos rectángulos isósceles, adquiriendo una idea del Teorema de Pitágoras. Mover un poco el palo de balsa implicaba trabajar con un nuevo triángulo rectángulo que no poseía las características de igualdad entre dos lados que tenía el triángulo anterior. Esto significó un cambio de representación gráfico- geométrica, que permitió ver a los estudiantes que había un cambio significativo en el triángulo cuando se modificaba la medida y posición del palo y, por tanto, en la demostración, pues les resultaba obvia en la demostración que realizaron en un primer momento, pues no les serviría para desarrollar esta nueva configuración.

**Imagen 2.** Ejemplos gráficos del trabajo realizado



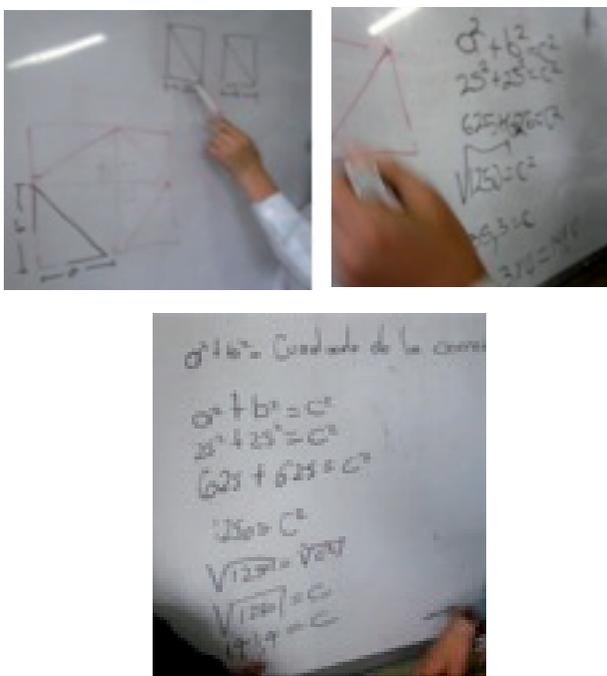
Los cambios en la variable didáctica permitieron a los estudiantes jugar con las presentaciones gráfico-geométricas, es decir, determinar distintas posibilidades para representar y profundizar en las relaciones y distintas figuras que cambian o aparecen cuando se alteran las representaciones. La situación fundamental permitió a los estudiantes llegar a una representación adecuada que les facilitó utilizar el Teorema sin dificultades. Esto se evidencia en las representaciones de los estudiantes para la sesión de acción y, su contraste con las de formulación-validación, el avance es importante.

**Imagen 3.** Ejemplos gráficos del trabajo realizado



Los estudiantes hicieron un uso efectivo de la cometa, componente necesario dentro de la situación, para representar y demostrar. Esto quiere decir que fueron capaces de representar utilizando herramientas distintas de sus imágenes mentales, también de relacionar las representaciones, comprender el cambio y buscar distintas maneras de representar.

**Imagen 4.** Fotografías del trabajo realizado



Las representaciones gráfico-geométricas evidenciadas obedecieron a dos categorías: las representaciones internas, normalmente utilizadas por el estudiante con limitación visual, se dieron gracias a que no posee imágenes mentales, construidas por visualización, de lo que es un cuadrado y mucho menos de lo que es una cometa, estas imágenes las adquiere con el tiempo y con una debida enseñanza.

Por ello, este estudiante recrea la situación problema en su mente, tratando de unir todos los conceptos, por ejemplo, triángulos isósceles asociados con dos lados iguales, de allí parte la necesidad de establecer comparaciones y relaciones entre todos los tipos de triángulos; luego de este proceso mental, reproduce lo producido en su mente estableciendo el dinamismo y correspondencia entre las representaciones, es por ello que en muchas ocasiones su nivel de aprehensión del conocimiento es superior al de sus compañeros. Este estudiante diseñó estrategias asombrosas que le ayudaron a resolver el problema, mientras que algunos estudiantes videntes no diseñaron ninguna y se basaron únicamente en operaciones conocidas, como siguiendo un patrón de resolución ya aprendido pero no demostrado.

También se dio lugar a representaciones externas que surgen inmediatamente después de examinar la situación fundamental, pues al leer “la cometa cuadrada” dibujan un cuadrado sin necesidad de realizar un proceso que involucre imágenes mentales, aquí entran en juego los esquemas previos, en este caso, los polígonos regulares, particularmente el cuadrado. Posteriormente, se da la necesidad de relacionar todos los conceptos que aparecen en la situación, creando una representación compuesta que comprende varias figuras de las que ya se tiene conocimiento, sólo hay que plasmarlas.

Es importante destacar que la mayor dificultad de la investigación fue la representación gráfica de las figuras y cuerpos geométricos, sobre todo, porque el niño con limitación visual normalmente no está habituado a la realización de dibujos. Por ello, es conveniente llevar a cabo un adiestramiento en esta actividad. El niño invidente tiene acceso a las representaciones bi-dimensionales, como los demás niños, mediante el uso de material adaptado (compás, curvígrafo, escuadra,

papel bond, regla, etc.), y de otros instrumentos específicos (plantillas de dibujo positivo y negativo, pistola de silicona, láminas de plástico para dibujo y diversos tipos de ruedas dentadas para marcar), sin embargo, durante la actividad se presentó cierto desinterés de los profesores por el desarrollo de instrumentos en los estudiantes.

Al parecer, las representaciones gráfico-geométricas no tienen cabida en el currículo de matemáticas, pues se encontró que los estudiantes se inclinan más por la aplicación de algoritmos, sin desarrollar reflexión alguna. Lo anterior se debe a que las situaciones planteadas en la clase de matemáticas son en su mayoría algorítmicas, de única solución y no representan un verdadero problema para el estudiante, ni permiten un proceso de resolución de problemas.

La investigación logró establecer una estrategia para que el estudiante invidente manifestara sus comprensiones y las confrontara con las de sus compañeros, así se logró promover una comunicación gráfico-geométrica en el aula inclusiva. Igualmente, se confirmó que los procesos de representación gráfico-geométrica son importantes para los niños videntes e invidentes, y que ayudan en la comprensión y resolución de situaciones problemas.

Se logró dilucidar que para que exista una verdadera inclusión en el aula de clase no basta sólo con adaptar recursos como la regla, el compás, transportador y demás instrumentos; sino que se hace necesario cambiar la perspectiva del proceso de enseñanza-aprendizaje actual, es decir la manera de ver la educación, el lenguaje y la predisposición, pero sobre todo desarrollar acciones cotidianas que la materialicen.

Esta investigación puede servir como guía de orientación a los maestros de las diferentes áreas, en especial a los educadores matemáticos, para la adaptación de situaciones problema desarrolladas en contextos y recursos inclusivos. Los tiempos y actividades de orden administrativo propios de la escuela pueden llevar a pensar a los maestros que es difícil hacer adaptaciones pertinentes, sin embargo, a partir de los resultados del presente trabajo es posible dar las siguientes recomendaciones:

- Trabajar siempre con recursos manipulativos, eso ayudará a que los estudiantes concreten algunos conceptos y procedimientos.
- Tener en cuenta las adaptaciones a los recursos, sin que se desvirtúe su finalidad pedagógica o se termine haciendo un recurso diferente. Algunas adaptaciones a considerar pueden ser pasar a la escritura braille, resaltar texturas para remplazar el color, delimitar fronteras, etc.
- Garantizar que el recurso adaptado para una persona invidente también lo pueda ser usado por una persona vidente.
- Privilegiar la exploración del recurso por parte de todos los estudiantes, no sólo por parte del estudiante invidente.
- Proponer trabajos de orden cooperativo donde se fortalezca la inclusión.

Finalmente, la investigación legitimó la importancia de formar profesores para atención de poblaciones con NEES, pues se requiere de ciertas habilidades y sensibilización para hacer un trabajo consiente y funcionar como garantes del derecho a la educación. Además esta formación resulta fundamental ya que permite el desarrollo de cambios significativos y el progreso a favor de eliminar la exclusión, particularmente en el aula de matemáticas.

## Referencias

---

- Alsina, C. (1989). *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Barreto, J. (2008). *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*. Venezuela: Universidad de Venezuela, Universidad Nacional Abierta.
- Barreto, J. (2008). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Didáctica de las matemáticas*, 35-51.
- Barreto, J. C. (2009). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas, como recurso didáctico en la extensión geométrica del Teorema de Pitágoras. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Unión*, 31-51.
- Beltrán, R. (2005). *Metodología de la investigación*. Universidad operuna Cayetano Heredia. Obtenido desde [http://www.upch.edu.pe/faest/clasvirtual/dos/dos4/conceptos\\_investigacionyconocimiento\\_cientifico.pdf](http://www.upch.edu.pe/faest/clasvirtual/dos/dos4/conceptos_investigacionyconocimiento_cientifico.pdf).

- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática*. Recherches en didactique de Mathematiques. Ed. Grenoble.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Comes, G. (2003). *Lectura y libros para alumnos con necesidades educativas especiales*. Ediciones CEAC.
- Corberán, R. (s.f.). *El área. Recursos didácticos para su enseñanza en primaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Crowley, M. (1987). *The Van Hiele model of development of Geometric thought, N.T.C.M.: Learning and teaching geometry, K12, N.T.C.M., Reston, 1-16*.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang S.A.
- Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano*. Lang, Suisse.
- Euclides, (1991). *Elementos*. Madrid: Gredos.
- Fernández del Campo, J., Núñez, J., y Rosich, N. (1996). *Matemáticas y diferencia sensorial*. Editorial Síntesis.
- Fernández, J. (1986). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. Madrid: ONCE-Organización Nacional de Ciegos Españoles.
- Godino, J. (2002). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas*. Portugal, 117-127.
- Gutiérrez, Á. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría*, 44-59.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele, Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Ediciones Alfar, 295-384.
- Kawulich, B. (2005). *La observación participante como método de recolección de datos*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Fundamentación conceptual para la atención en el servicio educativo estudiantes con necesidades educativas especiales*. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (1994). *Ley General de Educación*. Bogotá D.C.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Plan decenal de educación. Lineamientos sobre poblaciones vulnerables*. Bogotá.
- Molina, M. (1999). *Integración de invidentes en la clase de matemáticas. Agenda de investigación desde la teoría de las situaciones didácticas*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza. Obtenido desde <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/invidentes.htm>
- Moll, L. C., Armanti, C., Neff, D., y Gonzalez, N. (1992). Funds of knowledge for teaching: Using a qualitative approach to connect homes and classrooms. *Theory into Practice*.
- Ortiz, M. (2000). Hacia una educación inclusiva. La educación especial ayer, hoy y mañana. *Revista Siglo Cero*. Vol. 31 (1), 5-11.
- Taborda, A. B. (2008). *El dibujo en el niño. Evolución del grafismo*.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight*. New York: Academic Press.
- Vilella, X. (2011). Enseñanza táctil. Geometría y color para niños ciegos y videntes. Obtenido el 25 de abril de 2011, desde [http://www.sistemaconstanz.com/index.php?option=com\\_content&task=view&id=47&Itemid=54](http://www.sistemaconstanz.com/index.php?option=com_content&task=view&id=47&Itemid=54)
- Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Buenos Aires. Grijalbo.
- Yin, R. (1994). *Case study research: Design and methods*. California: Sage.

## **Diálogo del conocimiento**

---

En el ámbito de las matemáticas, así como en su enseñanza, la geometría cobra un papel de suma importancia, ya que se constituye en la base fundamental de las diversas representaciones y formalizaciones; más aún, se puede decir que un concepto o un problema matemático está completamente comprendido si es posible hacer una representación geométrica del mismo. Por otra parte, la geometría no se queda limitada al campo de la matemática, sino que es un conocimiento fundante de las ciencias naturales, especialmente de la física, cuyo núcleo de formalización y conceptualización implica conceptos y representaciones geométricas.

El teorema de Pitágoras, si no es el más importante de la geometría, es uno de los más importantes, ya que está en las bases fundamentales de la geometría plana, junto con los axiomas de la geometría Euclidiana; además se constituye en un elemento esencial de la representación de los espacios vectoriales, tan usados en la física.

Tomando en cuenta los aspectos anteriormente mencionados la enseñanza de la geometría, y por supuesto del teorema de Pitágoras, es de vital importancia para la formación básica, y por qué no avanzada, en matemáticas, ya que provee una amplia comprensión de la geometría plana y de sus aplicaciones para otros ámbitos del conocimiento, no solamente teórico sino práctico, como la física y la arquitectura, entre otros. Es en este sentido que abordar el problema de la enseñanza y el aprendizaje del teorema de Pitágoras, de tal manera que resulte significativo y comprensible para los estudiantes, se constituye en un campo de estudio e investigación para la enseñanza y didáctica de las matemáticas, más aún si se considera la diversidad, en cuanto a representaciones espaciales del mundo, que supone la inclusión de estudiantes con limitación visual en la escuela regular.

El trabajo presentado por el artículo es una base de reflexión de lo que implica la inclusión escolar de personas con necesidades educativas especiales, en cuanto a la construcción de estrategias para la enseñanza adecuadas al contexto inclusivo, que no solamente le aportan espacios de significación a los estudiantes que se consideran con limitaciones, sino que enriquecen la experiencia de los estudiantes que no tienen estas limitaciones, y que hacen de la labor del maestro una acción mucho más fundamentada, consiente y comprometida con el aprendizaje de los estudiantes. En este orden de ideas la enseñanza del teorema de Pitágoras a estudiantes con limitación visual se constituye en un espacio enriquecedor para la enseñanza de las matemáticas, ya que implica el uso de materiales muy pensados y estrategias de comunicación que pongan en interacción las representaciones espaciales de personas que ven con aquellas que no.

*Juan Carlos Castillo*